



CAIM 2025

Proceedings of THE 32nd INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED AND INDUSTRIAL MATHEMATICS

Communications in Education

**September, 18-21, 2025
Bucharest, Romania**

Bucharest, 2025

The 32nd International Conference on Applied and Industrial Mathematics
was hosted by National University of Science and Technology POLITEHNICA Bucharest,
060042, Bucharest, Romania, <https://upb.ro/>

"Ion Creanga" State Pedagogical University of Chisinau, Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies contributed as a co-organizer, within the CAIM 2025 International Conference, to the publication of the volume "Proceedings of the 32th International Conference on Applied and Industrial Mathematics, Communications in Education" and to the good conduct of section 8 - "Education"

Recommended for publication by the Scientific Council of the Faculty of Physics, Mathematics and Information Technologies, „Ion Creanga” State Pedagogical University of Chisinau, Republic of Moldova

Editor: prof. Liubomir Chiriac

Technical editor: Maria Pavel

Authors are fully responsible for the content of their papers

Copyright © Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics, 2025

ISSN 3061-3477

ISSN-L 3061-3477



PIM Publishing House

e-mail: tipografiaiasi@pimcopy.ro
<https://pimcopy.ro/editura>

TABLE OF CONTENTS

FOREWORD	5
ADAM Corina, AFANAS Dorin, BRIGALDA Arina. Theoretical foundations of applied mathematics in drone communications	8
AFANAS Dorin, BUNDIUC Lilia. Theoretical foundations of plane geometry with applications in the metric analysis of convex patrulateries.....	27
BALMUS Nicolae, UNGUREANU (ZAHIU) Mariana-Denisa. Interactive activities for digital mathematics textbooks, grade 5. Case study: Romania – Republic of Moldova ...	38
BORSENCU Ivan. Embedding the theme of chess in teaching math to gifted middle and high school students	48
BRAICOV Andrei. Digital textbooks for mathematics: between pedagogical potential and implementation challenges	54
BRIGALDA Arina, AFANAS Dorin. Aerial algebra: concepts, methods and real-world applications.....	65
CALMUTCHI Laurentiu. Application of some techniques for solving non-geometric problems through geometric methods	85
CHIRIAC Eugenia, GRIGORCEA Sofia, TIGANAS Odetta. Inter-transdisciplinary learning – today's imperative	96
CHIRIAC Liubomir, LUPASCO Natalia, FETANU Elisa-Ioana. Remodelling the mathematics education process from the perspective of AI performance	101
CHIRIAC Tatiana. Teaching mathematics with digital textbooks: global perspective and implementation challenges	112
CORLAT Andrei, JARDAN Ion. Some aspects of the monotony of functions in solving equations.....	122
FETANU Elisa-Ioana. Studying mathematics in mainstream education by researching different types of problems	126
GEORGESCU Raluca Mihaela, TUDOSE Cristina Vasilica. A 4-point non-coplanar problem solved in Maple.....	131
GLOBA Angela, GASNAS Ala. Analysis of the disinformation phenomenon in the Republic of Moldova from a social and technological perspective	142

GLOBA Angela, GASNAS Ala. Mathematics – a key foundation for developing programming competence	154
HAJDEU Mihaela, BORDAN Valeriu. About international standards in mathematics education: challenges and solutions in adapting them to local specificity	166
ILEANA Ioana, DIACONU Maria Crina. Alternative methods of angle trisection ...	173
JOSU Natalia. Validating the extension of interactive education in teaching design through the implementation of interactive worksheets	178
PAVEL Maria, PAVEL Dorin. Comparative analysis of the results of the study of programming languages by future computer scientists.....	184
POSTOLACHI Igor, GUTU Ionela, POSTOLACHI Valentina. Free fall of the body in the presence of resistance force.....	190
POSTOLACHI Igor, REONEAC Vitalie, POSTOLACHI Valentina. Motion of a body thrown at an angle to the horizon in the presence of resistance forces	197
SALI Larisa, IONEL Mirela. Methodological aspects regarding the development of mathematical modeling competence from the perspective of ensuring continuity between pre-university and university education	202
SALI Larisa, TELEUCA Marcel. Strategies for didactic transposition of the geometric contents with an impact on the performance of students in lower secondary education	212
VASCAN Teodora. Effective prompt design strategies: fundamental principles for educators beginning in artificial intelligence	226
VEVERITA Tatiana. The role of computational thinking and statistical thinking in modernizing the computer science curriculum	236
VIESPESCU Carina Maria, ILINCA Sebastian Petrisor. Using the properties of convex/concave functions for proving inequalities	245

PREFATĂ / FOREWORD

Facultatea Fizică, Matematică și Tehnologii Informaționale (FMTI), în prezent o subdiviziune a Universității Pedagogice de Stat din Chișinău "Ion Creangă", sărbătorește 95 de ani de la fondare. Facultatea FMTI este considerată una din primele facultăți ale învățământului superior din Republica Moldova. Constituită în anul 1930, în cadrul Institutului Pedagogic de Stat din Tiraspol, facultatea Fizică și Matematică a contribuit semnificativ la promovarea educației, studiilor și cercetărilor în domeniul matematicii, fizicii și informaticii. De menționat că în perioada 02.02.1932 – 27.02.1938 studiile în cadrul instituției respective se făceau în limba română/moldovenească în baza alfabetului latin. Mai jos vom evidenția unele momente cheie în dezvoltarea facultății FMTI.

Pentru a pregăti profesori de informatică, prin decizia Ministerului Învățământului Superior de la Chișinău, la Institutul Pedagogic de Stat din Tiraspol (IPST), la 15 octombrie 1985, în cadrul facultății de Fizică și Matematică, a fost constituită prima Catedră de Informatică și Tehnică de Calcul din fosta URSS. Prin ordinul emis de Andrei Hariton, dr., profesor universitar, rector IPST, în anul 1985, un discipol al celebrului matematician, profesorul Eugen Grebenicov, Iulian Marcov, dr. în științe matematice, conf. universitar, este numit șeful Catedrei de Informatică și Tehnică de Calcul (ITC).

În anul 1992, deja, în cadrul facultății Fizică și Matematică activau eficient următoarele 8 catedre: Catedra de Analiza Matematică; Catedra de Algebră; Catedra de Geometrie; Catedra Metodica Predării Matematicii; Catedra Fizica Generală; Catedra Fizica Teoretică; Catedra Metodica Predării Fizicii; Catedra Informatică și Tehnică de Calcul. Pe lângă subdiviziunile menționate funcționau circa: 15 laboratoare didactice, două laboratoare științifice, un Observator astronomic și Planetariu.

Un rezultat excepțional realizat de colectivul facultății FMTI este faptul că în anul 2020 membrii FMTI, circa 45 de persoane, erau deja absolut toți doctori în științe. Acest rezultat se datorează școlilor de cercetare create în cadrul Facultății FMTI. Evidențiem în acest sens următoarele:

În cadrul Universității de Stat din Tiraspol (UST), începând cu anii 1970, a fost constituită școala de topologie, algebră topologică și aplicațiile ei. Fondator al acestei școli a fost academicianul Mitrofan Ciobanu. Direcțiile de cercetare sunt: clasificarea spațiilor și funcțiilor; extensii și compactificări; spații funcționale; algebra topologică; teoria descriptivă a mulțimilor; metode topologice în analiza funcțională, optimizare, teoria măsurii și teoria probabilităților etc. Menționăm că primele cercetări topologice în Moldova au fost efectuate în anii 1957–1964 de către academicianul Petru Soltan și profesorii Ivan Parovicenko și Petru Osmatescu. Astăzi se studiază cu succes spații Cioban, spații Parovicenko, operații Cioban și se aplică diverse metode create de M. Ciobanu.

Conform amintirilor academicianului Mitrofan Cioban: „Profesorul P. Osmatescu și academicianul P. Alexandrov au fost inițiatorii organizării vestitelor simpozioane tiraspolene „Topologia Generală și Aplicațiile ei”, cu prima ediție din 1965, care au fost un catalizator efectiv al dezvoltării școlilor matematice din Moldova. În anul 1965, profesorul P. Osmatescu, la deschiderea Congresului al III-lea al Scriitorilor din Moldova, a fost printre primii care au declarat că alfabetul latin este unicul veșmânt natural al limbii române care se numește „limbă moldovenească” în Moldova”.

În cadrul școlii academicianului Mitrofan Cioban, sub conducerea și coordonarea lui nemijlocită, au fost susținute peste 25 de teze de doctor și doctor habilitat, inclusiv 17 teze de doctor și patru teze de doctor habilitat. Reprezentanți ai acestei școli sunt doctorii habilitați, profesorii D. Botnaru, L. Calmuțchi, L. Chiriac, D. Ipate și doctorii în științe D. Afanas, S. Dumitrașcu, H. Attia, N. Dodon, E. Mihailova, A. Alb, A. Tripe, D. Pavel, L. Sali, A. Sava, M. Pavel, I. Ciobanu, R. Dumbrăveanu, N. Ursu.

Un rol important în dezvoltarea didacticilor științelor reale și pregătirea cadrelor de calificare înaltă, în cadrul UST, l-a avut academicianul Mitrofan M. Cioban, care în cooperare cu I. Lupu, dr. habilitat, profesor universitar, A. Hariton, dr., profesor universitar, în anul 2002, au constituit Școala Doctorală „Teoria și metodologia instruirii” din cadrul Universității de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău), care s-a dovedit a fi unica în Republica Moldova. Cercetările remarcabile în cadrul școlii respective s-au axat, în mod special, pe didacticele științelor exacte și ale naturii (matematică, fizică, informatică, chimie, biologie, geografie). Grație cercetărilor avansate în domeniul didacticii, în cadrul Universității de Stat din Tiraspol a fost fondat unicul seminar științific de Profil și Consiliul Științific Specializat în domeniul didacticii științelor exacte și ale naturii în Republica Moldova. În calitate de conducători științifici, în cadrul Școlii doctorale „Teoria și metodologia instruirii”, au înregistrat rezultate frumoase: Mitrofan Cioban, dr. hab., prof. univ., academician al AȘM; Ilie Lupu, dr.hab., prof. univ.; Andrei Hariton, dr., prof. univ.; Liubomir Chiriac, dr. hab., prof. univ.; Laurențiu Calmuțchii, dr. hab., prof. univ.; Andrei Braicov, dr. conf. univ.; Viorel Bocancea, dr. conf. univ.; Valeriu Cabac, dr. prof. univ.; Eduard Coropceanu dr. prof. univ.; Anatol Gremalschi, dr. hab., prof. univ.; Vasile Panico, dr., prof. univ. etc. Astfel, pe parcursul ultimilor 20 de ani de activitate, în cadrul Școlii doctorale respective au fost susținute 47 de teze doctor în științe - un rezultat frumos pentru Școala doctorală din cadrul UST și un rezultat excelent pentru știința pedagogică din țara noastră.

În contextul respectiv, ținem să subliniem faptul că Adelina Georgescu (1942-2010), dr., profesor universitar, primul președinte ROMAI, fondatoarea „mișcării pro-matematică aplicată și industrială” în România și Republica Moldova, chiar la I ediție a CAIM-ului, în anul 1993, a formulat problema privind necesitatea abordării la conferințele ROMAI a educației matematicii și informaticii din prisma inter/transdisciplinarității ca o soluție

practică la provocările timpului și a constrângerilor cu care se confruntă societatea modernă. În acest an, în cadrul ediției CAIM XXXII (2025), comemorăm 15 ani de la trecerea în neființă a dnei A. Georgescu, dr., prof. universitar. Cercetările realizate de A. Georgescu la frontiera dintre diverse domenii științifice, conțineau un profund spirit interdisciplinar. Președintele ROMAI, Adelina Georgescu, în parteneriat cu academicianul Mitrofan Ciobanu, au încurajat și stimulat pe parcursul anilor cooperarea cercetătorilor din diferite domenii, identificând probleme interdisciplinare, și propunând metode și instrumente noi de cercetare.

Pentru merite deosebite în domeniul cercetării și a pregătirii specialiștilor de înaltă calificare, inclusiv pentru Republica Moldova, dnei A. Georgescu, dr., prof. universitar, în anul 2006 i s-a decernat Doctor Honoris Causa al UST - un gest de mândrie pentru profesorii și studenții Facultății FMTI, dar și pentru colegii ROMAI. În contextul dat, este necesar de menționat că profesorii UST au participat activ la toate edițiile CAIM-ului în calitate de membri ai Comitetului de organizare și Comitetului de Program al Conferințelor CAIM-I – CAIM-XXIX. UST a fost co-organizator la 6 ediții CAIM: 3 (1995), 4 (1996), 14 (2006), 20 (2012), 26 (2018), 29 (2022).

Vrem să credem că acest volum, care conține lucrări pe subiecte de didactică din diferite domenii: matematică, informatică, fizică, biologie etc., va contribui la cooperarea inter/transdisciplinară între reprezentanții diverselor științe, va fi util profesorilor și studenților și, sperăm noi, ar conduce la cooperare eficientă între diverse discipline și domenii de cercetare.

Liubomir CHIRIAC, dr. habilitat, profesor universitar

Maria PAVEL, dr., conferențiar universitar

UDC: 621.396:629.014.9:519

THEORETICAL FOUNDATIONS OF APPLIED MATHEMATICS IN DRONE COMMUNICATIONS

Corina ADAM, Master in Educational Sciences

e-mail: cpaireli23@gmail.com

"Ion Creangă" State Pedagogical University from Chisinau, Republic of Moldova

Dorin AFANAS, PhD, Associate Professor

<https://orcid.org/0000-0001-7758-943X>

e-mail: afanasdde@gmail.com

"Alexandru cel Bun" Military Academy of the Armed Forces of the Republic of Moldova

Arina BRIGALDA, Master in Educational Sciences

<https://orcid.org/0009-0000-2600-2360>

e-mail: arinabrigalda@gmail.com

Military College of the Armed Forces "Alexandru cel Bun", Republic of Moldova

Abstract. This paper examines the theoretical mathematical foundations underpinning modern drone communication systems. It discusses key mathematical models that describe signal propagation, interference, and attenuation in dynamic aerial environments. Linear algebra is applied to matrix-based channel modeling and multi-signal processing in space-time domains. Probability theory and stochastic processes are explored as essential tools for modeling noise and random variables affecting data transmission. Fourier and Laplace transforms are presented as fundamental instruments in spectral analysis, facilitating the decomposition of signals and effective noise mitigation. The study also incorporates core concepts from Shannon's information theory, including entropy, source coding, and channel coding, which contribute to enhancing communication efficiency and reliability. The article underscores the integral relationship between mathematical theory and the performance of drone-based communication systems, providing a comprehensive and applicable framework for further research and development in the field.

Keywords: drone communications, linear algebra, stochastic processes, transforms, information theory, signal analysis.

FUNDAMENTE TEORETICE ALE MATEMATICII APLICATE ÎN COMUNICAȚIILE CU DRONE

Rezumat. Această lucrare examinează fundamentele matematice teoretice care stau la baza sistemelor moderne de comunicații cu drone. Sunt analizate modelele matematice esențiale pentru descrierea propagării semnalului, interferențelor și atenuării în medii aeriene dinamice. Algebra liniară este aplicată în modelarea matricială a canalelor de comunicație și în procesarea semnalelor multiple în cadrul spațio-temporal. Teoria probabilităților și procesele aleatoare sunt explorate ca instrumente esențiale în modelarea zgomotului și a variabilelor aleatoare care afectează transmisia datelor. Transformatele Fourier și Laplace sunt prezentate ca instrumente fundamentale în analiza spectrală, facilitând descompunerea semnalelor și atenuarea eficientă a zgomotelor. Lucrarea integrează, de asemenea, concepte centrale din teoria informației, precum entropia, codificarea sursei și codificarea canalului, în conformitate cu principiile formulate de Claude Shannon, care contribuie la creșterea eficienței și fiabilității comunicațiilor. Studiul

subliniază relația esențială dintre teoria matematică și performanța sistemelor de comunicații aeriene cu drone, oferind un cadru teoretic amplu și aplicabil cercetării și dezvoltării ulterioare în domeniu.

Cuvinte-cheie: comunicații cu drone, algebră liniară, procese stocastice, transformate, teoria informației, analiza semnalelor.

Introduction

In the context of the accelerated evolution of digital communication technologies, the development of rigorous theoretical models becomes essential for understanding and optimizing information transmission. Communication is no longer viewed exclusively as a technological process, but as a complex system in which mathematics provides the language and tools necessary for abstracting phenomena, describing the behavior of transmission channels and designing efficient solutions. In this context, mathematical foundations do not only represent a theoretical basis, but constitute a true integrative mechanism for analysis, simulation and decision in modern communication architectures [7].

The present paper aims to investigate, in a structured manner, the main mathematical components involved in communication processes, with an emphasis on their practical applicability. It starts from the construction of mathematical models that define the essential relationships between the information source, the transmission channel and the receiver [2, 10]. These models are indispensable in the design of robust systems, capable of operating in conditions of noise, interference and signal loss. Next, linear algebra is approached from the perspective of signal analysis and processing, especially in multi-channel systems and in matrix-based communication, frequently encountered in MIMO (Multiple Input Multiple Output) technologies [9].

A central role is played by probability theory and random processes, indispensable for modeling the stochastic nature of signals and noise [11]. They allow the estimation of system performance in variable statistical regimes and provide a framework for optimizing decisions at the receiver level [6]. On this basis, frequency domain analysis is built, using the Fourier transform and, in certain contexts of nonlinear or transient systems, the Laplace transform [3 – 5]. These mathematical tools facilitate the spectral interpretation of signals, the determination of the optimal filter and the analysis of the system response in dynamic regime.

Last but not least, the paper integrates the fundamental concepts of information theory, formulated by Claude Shannon [8], such as entropy, channel capacity, and the principles of source and channel coding [1]. These concepts provide a formal measure of uncertainty and communication efficiency, representing the theoretical foundation for modern standards of compression and error correction.

By combining these elements, the paper proposes a unified perspective on mathematics applied to communications, highlighting not only the theoretical foundations,

but also their direct relevance for the development of advanced communication systems, including airborne, distributed, or autonomous ones.

1. Mathematical models in communications

In modern communications, mathematical models play a key role in describing, analyzing, and optimizing the process of transmitting information. These models allow engineers and researchers to simulate the behavior of real systems, predict performance, and design efficient transmission and reception protocols. In general, a mathematical model in communications is a symbolic formulation of the relationships between the system parameters: signal, channel, noise, and receiver.

A typical communication system can be represented mathematically by the following scheme:

$$x(t) \xrightarrow{\text{encode}} s(t) \xrightarrow{\text{channel}} r(t) \xrightarrow{\text{decode}} \hat{x}(t),$$

where:

- $x(t)$ is the original signal (information);
- $s(t)$ is the transmitted signal, the result of the encoding;
- $r(t)$ is the received signal, affected by the channel and noise;
- $\hat{x}(t)$ is the estimate of the original signal after decoding.

Each stage of this transmission is mathematically modeled by specific functions or equations, depending on the nature of the signal and the propagation medium.

The transmitted signal $s(t)$ can be modeled as a deterministic or random function. In digital communications, signals are often represented as sequences of pulses or binary waveforms, each associated with a symbol. Mathematically, we can describe a digital signal as a weighted sum of basis functions:

$$s(t) = \sum_n a_n \cdot \phi(t - nT),$$

where:

- a_n are the symbolic coefficients (for example: bits 0 and 1);
- $\phi(t)$ is the basic waveform;
- T is the symbol period.

Spectral analysis (through Fourier transforms) allows the study of the component frequencies of the signal and the choice of the optimal spectrum for transmission.

The communication channel is the physical medium through which the signal propagates, and is frequently mathematically modeled by a linear system with impulse response $h(t)$. In a convolutional representation: $r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$, where:

- $r(t)$ is the received signal;
- $h(t)$ is the impulse response of the channel;

- $n(t)$ is the additive noise (usually modeled as a stochastic process).

A particular case is the *additive white Gaussian noise* (AWGN) channel, where:

$$r(t) = s(t) + n(t), n(t) \sim N(0, \sigma^2).$$

This model is frequently used in theoretical studies because it allows for a simplified analytical analysis of performance.

In more realistic contexts, such as mobile or drone communications, fading channel models are used, such as:

- Rayleigh model: when the signal arrives via multiple indirect paths (multi-path);
- Rician model: when there is also a direct component (line of sight).

In order to improve the reliability of transmissions, information is encoded using error-correcting codes, described by linear algebra and finite field theory. Let a message be represented by a vector $\vec{m} \in F_q^k$, and the applied code is a linear code with generator matrix G : $\vec{c} = \vec{m} \cdot G$, where $\vec{c} \in F_q^n$ is the encoded vector, and $n > k$. Decoding involves the use of a parity matrix H for error detection and correction: $\vec{s} = \vec{r} \cdot H^T$, where $\vec{s}$ is the syndrome indicating the possible positions of errors in the received vector $\vec{r}$.

Transmission in an unreliable environment requires probabilistic error modeling. *Binary Symmetric Channel (BSC) channels*, with probability p of error per bit, are modeled by Markov chains or Shannon formulas: $C = 1 - H(p)$, where C is the channel capacity, and

$$H(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p)$$

is the binary entropy. These models are the basis for designing channel codes that approach the maximum theoretical error-free transmission capacity (Shannon limit).

In the case of distributed communications (e.g. drone networks), the network can be modeled by a directed graph $G = (V, E)$, where:

- V is the set of nodes (drones, relays, stations);
- E is the set of communication links.

Routing algorithms (Dijkstra, Bellman-Ford) are applied to optimize transmissions based on latency, capacity or energy consumption. The network topology can be dynamic, being affected by the movement of drones, which requires temporal models (dynamic graphs or mobile ad-hoc networks - MANET).

2. Linear algebra and signal analysis in drone communications

In the architecture of aerial drone communication systems, linear algebra and signal analysis constitute two fundamental pillars. These branches of mathematics allow the description and optimization of the processes of encoding, transmission, filtering and detection of signals in a dynamic, complex and error-prone environment.

2.1. Linear algebra in drone communication systems

In digital communications, signals can be represented as vectors in vector spaces defined over number fields. Each signal is a vector $\vec{s} \in R^n$ or C^n , where each component corresponds to a sample or symbol. Signal combining, transforming, and filtering operations are based on concepts such as:

- vector spaces;
- orthogonal bases;
- linear projections;
- linear (matrix) transformations.

They are used in signal equalization, data compression, and noise reduction.

Modern communication systems use MIMO (Multiple Input, Multiple Output) technologies to increase the transfer rate by using multiple antennas simultaneously. The mathematical model of MIMO is formulated as: $\vec{y} = H\vec{x} + \vec{n}$, where

- $\vec{x} \in C^t$: the transmitted signal (t transmitters);
- $\vec{y} \in C^r$: the received signal (r receivers);
- $H \in C^{r \times t}$: the channel matrix;
- $\vec{n}$: the noise.

The estimation of the transmitted signal is performed by matrix inversion or decomposition methods (SVD, QR), which are essential algorithms in numerical linear algebra applied to drone communications.

2.2. Signal analysis in drone communications

The signals transmitted by drones are analyzed in both the time and frequency domains. Key techniques include:

- Fourier Transform (FT) – for spectral component analysis:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

- Discrete Fourier Transform (DFT) – used in onboard DSPs:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j2\pi kn/N}.$$

- FFT (Fast Fourier Transform) – for real-time processing.

Drones have limited operating frequencies and use digital filters adapted to eliminate interfering components and extract useful signals.

Binary signals are modulated into analog forms for transmission. Mathematically, this process involves combining the basic signal $m(t)$ with a carrier $\cos(2\pi f_c t)$. The most common techniques:

- PSK (Phase Shift Keying);

- QAM (Quadrature Amplitude Modulation);
- OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) – used extensively in UAV communications for fast and robust transmissions.

OFDM is mathematically modeled as a sum of orthogonal signals:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j2\pi k \Delta f t},$$

where X_k are coefficients modulated on orthogonal frequencies Δf .

Upon reception, the signal is filtered through digital FIR/IIR filters and compared to reference signals. Signal detection involves techniques such as:

- correlation (for known signals);
- matched filter – optimal in the presence of white noise;
- ML (Maximum Likelihood) decisions – for probabilistic decoding.

The reconstruction of the transmitted signal involves interpolation and error correction, all supported by algebraic operations and intensive digital processing.

Thus, if we talk about the integration of the two fields in drone communications, then we can say that linear algebra provides the discrete structure (vectors, matrices, spaces) of the communications system, while signal analysis provides the continuous and spectral perspective of the processed signals. In real drone systems:

- communication between drones and stations is modeled through fading matrix channels (Rayleigh, Rician model);
- signal precoding is done using SVD decompositions for MIMO channels;
- filtering and detection are based on FFT optimized correlation techniques.

Thus, the integration of these two domains allows for reliable, efficient and adaptive communications in an unpredictable air environment, with time, energy and bandwidth constraints.

2.3. Examples applied in drone networks

Example 2.3.1. Topological modeling of a UAV network. A network consisting of several drones can be represented by a directed graph $G = (V, E)$, where V it's the crowd of drones, and E is the set of direct communication connections. Routing algorithms (e.g., Dijkstra) are applied to determine optimal routes between nodes based on latency and signal loss.

Example 2.3.2. Simulating a MIMO channel between two drones. We consider two drones equipped with two antennas each: $\vec{x} \in \mathbb{C}^2, \vec{y} \in \mathbb{C}^2$, and the channel is described by the matrix $H \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. If $\vec{x} = [x_1, x_2]^T$, the transmission is modeled by:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \vec{n}.$$

Estimate $\vec{x}$ it is done by $\hat{\vec{x}} = H^{-1} \cdot \vec{y}$, if H is reversible. SVD decomposition can also be used for noisy channels.

Example 2.3.3. Error correction in transmission between drones. Drones can use LDPC codes to transmit robust data. For example, a 512-bit binary packet is encoded into a 1024-bit vector using a sparse parity matrix. At reception, iterative decoding based on the Belief Propagation algorithm allows message reconstruction even with 10–15% of the bits affected by noise.

Example 2.3.4. Dynamic frequency allocation between drones. In a fleet of drones communicating simultaneously, real-time spectral analysis is used to avoid interference. Each drone applies local FFT to detect occupied frequencies and allocate a free band. This process is automated with machine learning algorithms, but the foundation is the analysis of signals in the frequency domain.

Thus, the combination of linear algebra and signal analysis enables the design of robust, efficient, and adaptable communication systems, essential in modern aerial drone communications, where environmental variations, interference, and mobility create major challenges. This integration supports the evolution towards autonomous, intelligent, and dynamic networks.

3. Probability theory and random processes in drone communications

In the era of digital communications, probability theory has become an essential component of applied mathematics. From information source modeling to channel estimation and signal detection, uncertainty is omnipresent, and its rigorous treatment requires advanced tools from probability theory and stochastic processes. In the following, we aim to outline the theoretical foundations necessary for understanding these phenomena in modern communications.

3.1. Fundamentals of probability theory in drone communications

A random variable X is a function defined on a probability space (Ω, F, P) , which associates each result with a real number. In communications, the transmitted signal and channel noise are often modeled as continuous or discrete random variables. In the context above:

- Ω is the space of possible outcomes (events) (sample space) of a random experiment;
- F is a σ -algebra of events, that is, it is a collection of subsets of Ω that meets certain conditions (complement closure and countable union) or represents the totality of "observable" or "interesting" events within the random process;
- P is the measure of probability or likelihood, that is, a function that associates to each event in F a probability, that is, a number between 0 and 1.

In drone communications Ω can represent:

- *All possible forms of the analog signal;*
- *All noise configurations;*
- *All possible combinations of transmission errors;*

- *All bits received at the end of a channel.*

Example 3.1.1. If we transmit a bit through a noisy channel, $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, that is, all combinations between the transmitted and received bit.

In drone communications F , may include events such as:

- *"The received signal is greater than a threshold";*
- *"The noise exceeds a certain value";*
- *"The probability that a packet will arrive corrupted", and F expresses;*
- *The probability that the signal will be correctly received;*
- *The probability of a transmission error;*
- *The probability of a delay in a network.*

The three components Ω , F și P works together like this: a random variable X takes results from Ω , "translates" them into real numbers, and then we can use P to calculate probabilities related to the values of X , through events in F .

Example 3.1.2. Suppose we have a noisy communication channel, where the transmitted signal is affected by a random variation (Gaussian noise).

- Ω : all possible realizations of noise n ;
- F : events like "noise $> 1V$ " or "noise is between $-0.5V$ and $0.5V$ ";
- P : normal noise distribution, for example $n \sim N(0, \sigma^2)$.

The random variable $X = s + n$, where s is the signal, models the received signal.

Example 3.1.3. In a noisy binary channel (Binary Symmetric Channel, BSC), the transmitted symbols $X \in \{0,1\}$ can be altered with a probability of error p , so that $P(Y \neq X) = p$.

Relevant distribution models are:

- *Binomial distribution – for modeling the number of errors in data packets;*
- *Gaussian distribution – for modeling additive white noise (AWGN);*
- *Exponential and Poisson distribution – in network traffic or packet arrival models.*

3.2. Stochastic processes and applications

A stochastic process is a family of random variables $\{X(t): t \in T\}$, where T is the set of time (discrete or continuous). In communications, such processes describe the evolution of signals over time, channel fluctuations, or data traffic.

- Markov processes: useful in modeling memory channels;
- Gaussian processes: for white noise or fading channels.

The essential properties are:

- Stationarity: statistics do not change over time;
- Ergodicity: temporal average = ensemble average;
- Correlation and autocorrelation function: tools in signal analysis.

A communication channel can be modeled by a stochastic process that affects the transmitted signal. If $X(t)$ is the input signal and $Y(t)$ is the output signal, then the relationship between them is often expressed as: $Y(t) = h(t) * X(t) + N(t)$, where $h(t)$ is the impulse response of the channel, and $N(t)$ is the random noise, usually modeled as a stationary Gaussian process.

In the case of fading channels, the coefficient $h(t)$ is also a random process – with Rayleigh or Rician distributions.

Application 3.3.1. Probabilistic Coding and Decoding.

- Error-correcting codes, such as LDPC or Turbo codes, rely on posterior probabilities for decoding.
- The Viterbi algorithm uses Markov models for transmitted sequences.

Application 3.3.2. Channel Estimation and Filtering.

- Bayesian or Kalman filters, both based on probabilistic modeling, are applied for real-time channel estimation.
- In MIMO systems, stochastic models are essential for separating signal streams.

In information theory the capacity C of a channel $Y = X + N$, cu $N \sim N(0, \sigma^2)$, is given by the formula:

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \text{ [bps/Hz]},$$

where P is the signal strength and σ^2 noise power – expression derived using probability theory.

4. Integral transforms in drone signal analysis: Fourier and Laplace

Integral transforms, especially the Fourier transform and the Laplace transform, are fundamental tools in signal analysis, having essential applications in modern communications, drone control and navigation systems. These transforms allow the representation of signals in alternative domains (frequency or complex), facilitating the analysis of the temporal and spectral behavior of dynamic systems.

4.1. Fourier transform in drone signal analysis

Applications of the Fourier transform in drone systems are:

- Radio communications analysis: Signals transmitted and received by drones (e.g.: telemetry, flight commands) are analyzed in frequency to eliminate noise and interference. Especially in the ISM bands (2.4 GHz, 5.8 GHz), Fourier allows the design of efficient digital filters.
- Control signal spectrum: Commands sent to motors can be analyzed by FFT (Fast Fourier Transform) to detect unwanted oscillations or mechanical vibrations.

- **Feedback stabilization:** The frequency response of drones to stabilization commands is essential for automatic control. Fourier analysis is applied to understand the behavior of the system in sinusoidal mode (bode plots, phase edges).
- **Discretization – FFT:** in the implementation on the drone's onboard microcontrollers, the signals are processed digitally. Thus, the Discrete Fourier Transform (DFT) and the FFT algorithm are used, which allows for rapid analysis of discrete signals in real time.

4.2. Laplace transform in modeling drone dynamic systems

The Laplace transform of a function $x(t)$ (with support at $t \geq 0$) is:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

where $s = \sigma + j\omega$. The Laplace transform allows not only the transition to the frequency domain, but also the analysis of the stability and transient behavior of the system.

Drones can be modeled as dynamic systems with inputs (commands) and outputs (position, velocity). For example, a simplified model of the vertical response (altitude) to an acceleration command can be expressed by a second-order differential equation:

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = u(t).$$

Applying the Laplace transform:

$$ms^2Z(s) + csZ(s) + kZ(s) = U(s) \Rightarrow \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}.$$

This transfer function allows for the analysis of the stability and performance of the drone, as well as the design of PID or other controllers (e.g., LQR).

The poles of the transfer function provide information about stability. If all poles are in the left half of the complex plane ($\text{Re}(s) < 0$), then the system is stable.

The inverse Laplace transform is used to obtain the time behavior of the drone (e.g., response time, surge, damping). This application is called “impulse and step response”.

Table 1 compares the Fourier and Laplace applications.

Table 1. Comparison of Fourier vs Laplace applications

Characteristic	Fourier transform	Laplace transform
Field	Time $\leftrightarrow$ Actual frequency	Time $\leftrightarrow$ Complex domain
Main application	Spectral analysis (frequencies, filters)	Modeling and analysis of dynamic systems
Use in drones	Radio communications, electrical signals	Motion control, stability, PID design
Physical interpretation	Sinusoidal signal components	Transient and steady-state behavior

4.3. Concrete examples from drone systems

Example 4.3.1. OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) communications. Modern drones (especially 5G or HD video transmission) use OFDM modulation. Each

subchannel is analyzed and generated by inverse Fourier transforms (IFFT) and FFT for reception, ensuring robust parallel transmission to interference and fading.

Example 4.3.2. Rotor vibration analysis. IMU (Inertial Measurement Unit) sensors take accelerations that can be analyzed by FFT to detect mechanical imbalances in the rotor blades. Identification of high-frequency components signals mechanical anomalies.

Example 4.3.3. Altitude controller design. Modeling vertical flight through differential equations allows the application of the Laplace transform to create optimized PID controllers (using frequency response and pole placement).

Figure 1 illustrates two essential graphs in the analysis of drone signals.

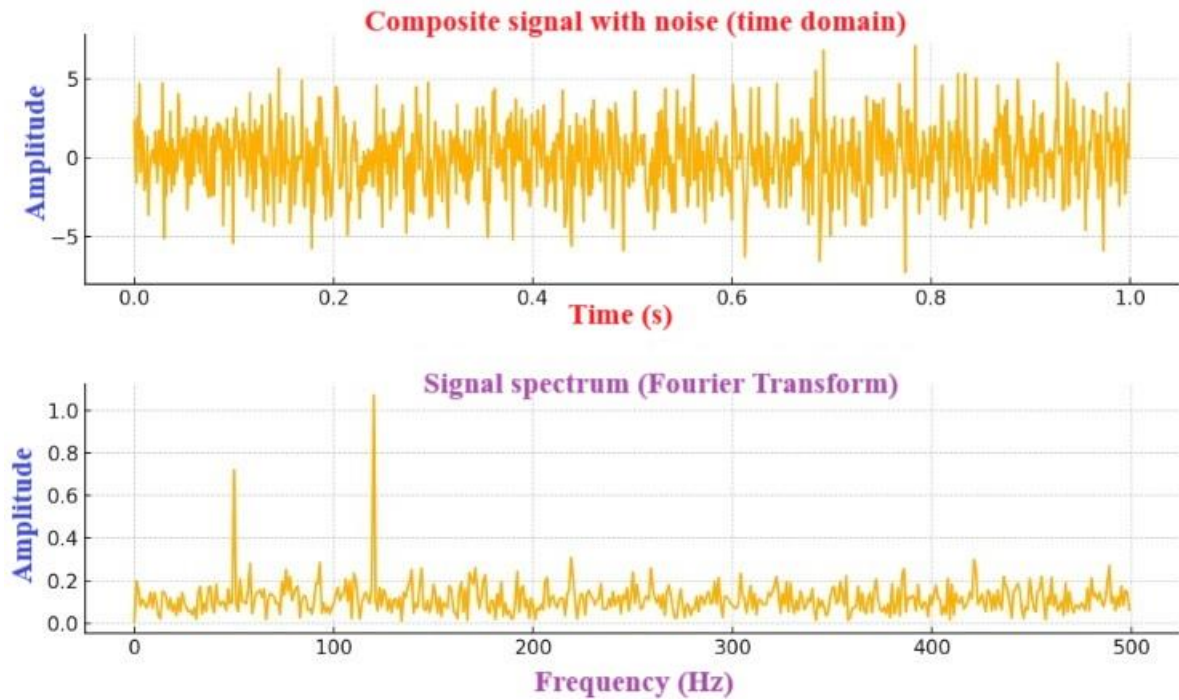


Figure 1. Signal analysis in the time and frequency domain

– Time domain: the first graph represents a signal composed of two sine waves (50 Hz and 120 Hz), to which white Gaussian noise has been added, simulating a communication or control signal received by the drone sensors. This accurately reflects the real conditions in the air environment, where useful signals are disturbed by noise and interference.

– Frequency domain – Fourier Transform: the second graph shows the result of the FFT analysis: the frequency spectrum. The two main components at 50 Hz and 120 Hz can be clearly observed, which demonstrates the power of the Fourier method in extracting significant frequencies even in the presence of noise.

The same code can be implemented in MATLAB as follows (fig. 2):

```
matlab

Fs = 1000;           % Rata de eșantionare
T = 1/Fs;
L = 1000;
t = (0:L-1)*T;

% Semnal compus + zgomot
x = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);
x = x + 2*randn(size(t));

% FFT
Y = fft(x);
P2 = abs(Y/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

% Grafic
subplot(2,1,1)
plot(t,x)
title('Semnal în timp')
xlabel('Timp [s]')
ylabel('Amplitudine')

subplot(2,1,2)
plot(f,P1)
title('Spectrul semnalului')
xlabel('Frecvență [Hz]')
ylabel('|P1(f)|')
```

Figure 2. Equivalent MATLAB example

In Simulink, a drone altitude control model (with Laplace) might include:

1. Reference input – Desired altitude.
2. PID controller – Designed based on the transfer function: $G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$.
3. Drone transfer function – Transfer Fcn block.
4. Simulated noise or external disturbances – Noise or Step blocks.
5. Position feedback – Simulate altitude sensor.
6. Scope and Display block – to visualize the evolution over time.

Figure 3 shows an illustrative block diagram of the drone altitude control simulation.

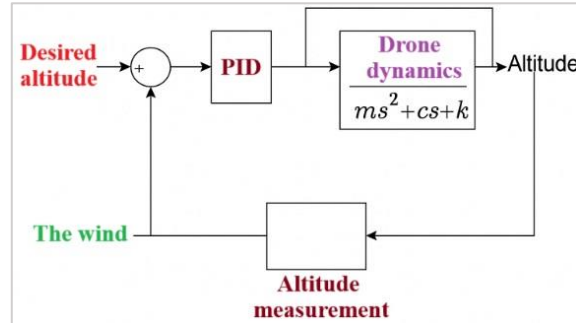


Figure 3. Illustrative block diagram of drone altitude control simulation

```
matlab

%% Controlul altitudinii unei drone
clear; clc; close all

%% Parametrii sistemului (modelul dinamic al dronei)
m = 1.5;    % masă (kg)
c = 2.0;    % coeficient de amortizare (Ns/m)
k = 10.0;   % rigiditate (N/m)

%% Funcția de transfer a dronei
num = 1;
den = [m c k];
G = tf(num, den);

%% Regulator PID
Kp = 35; Ki = 50; Kd = 10;
C = pid(Kp, Ki, Kd);

%% Sistem în buclă închisă
T_closed = feedback(C*G, 1);

%% Răspunsul la o referință de tip treaptă (altitudine dorită)
t = 0:0.01:10;           % axa timp (secunde)
step(T_closed, t)
title('Răspunsul în timp al dronei la o comandă de altitudine (cu PID)')
xlabel('Timp [s]')
ylabel('Altitudine [m]')
grid on
```

Figure 4. Altitude control with PID controller

Above is a complete MATLAB code (Fig. 4) to simulate the altitude control of a drone using a 2nd order model and a PID controller. This example can be implemented in MATLAB directly or transferred to Simulink via block equivalents.

In Simulink, the equivalent of this code can be constructed as follows:

Required blocks:

- Step – for the “Desired Altitude” reference
- Sum – for error (Reference - Feedback)
- PID Controller – PID block configured with K_p , K_i , K_d
- Transfer Fcn – with numerator 1, denominator [m c k]
- Scope – for altitude visualization
- Feedback loop – wire that takes the output back to the input

Simulink Steps:

1. Create a new model.
2. Add the above blocks.
3. Configure the transfer function: $[1] / [1.5 \ 2 \ 10]$.
4. Configure the PID controller: $K_p = 35$, $K_i = 50$, $K_d = 10$.
5. Connect the blocks according to the block diagram (as you received in the image).
6. Run the simulation for 10 seconds.
7. Open *Scope* → observe the system response.

This system controls the altitude of a drone starting from a desired altitude (e.g., 1 m), and the PID controller adjusts the thrust in such a way that the error (the difference between the desired and current altitude) is reduced quickly and with minimal oscillations.

5. Coding, entropy and information theory in drone communications

Information theory, founded by Claude Shannon in 1948, provides a rigorous mathematical framework for analyzing information transmission and processing. In modern drone communication systems, this theory underlies:

- Wireless channel design (RF, 4G/5G, LoRa);
- Source and channel coding;
- Capacity and error rate estimation;
- Optimization of data flows between drones and ground stations or other drones (ad-hoc networks).

5.1. Entropy – the measure of uncertainty

The entropy $H(X)$ of a discrete random variable X with probability distribution $P(x_i)$ is: $H(X) = -\sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i)$ [bit].

This measures the average amount of information contained in transmitted messages.

Example 5.1.1. Drone telemetry. Let us assume that a drone periodically sends messages about its state:

- “Stable flight” – 0.6
- “Minor vibration” – 0.3
- “Fault” – 0.1

Then the entropy is:

$$H(X) = -[0.6\log_2 0.6 + 0.3\log_2 0.3 + 0.1\log_2 0.1] \approx 1.295 \text{ (bits)}.$$

This is the average amount of information that needs to be transmitted per message, and serves as a theoretical lower limit for encoding.

5.2. Information encoding

Source coding is mainly aimed at reducing the redundancy of the data transmitted by the drone:

- Huffman codes – generate variable length codes, optimized according to the frequency of message occurrence.

Example 5.2.1. The above messages can be Huffman encoded to achieve an average rate close to entropy (~1.3 bits/symbol).

Channel coding aims to protect information against errors in the radio channel:

- Linear codes: Hamming, BCH, LDPC – detect and correct errors.
- Convolutional codes: used in drones for real-time transmissions (e.g. video), combined with Viterbi decoding.
- Turbo and LDPC codes: used in 5G communications and low-latency drone networks.

Drones often use noisy wireless bands. For the additive Gaussian noise (AWGN) channel

$Y = X + N$, where $N \sim N(0, \sigma^2)$, the maximum transmission capacity is:

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad [\text{bit/s/Hz}],$$

where P is the signal power, and σ^2 is the power of the noise.

If the drone transmits with a signal-to-noise ratio (SNR) of 10 (i.e. 10 dB), then:

$$C = \frac{1}{2} \log_2 (1 + 10) \approx 1.73 \text{ (bit/s/Hz)}.$$

This means that in each Hz of bandwidth, the drone can theoretically transmit 1.73 bits per second without errors – if an ideal encoding is used.

Example 5.2.2. Video transmission and advanced encoding.

- HD or 4K video transmissions from FPV (First Person View) drones use entropic coding (e.g. H.265) and adaptive error correction.
- The channel encoding is dynamically adapted depending on SNR and interference.

Example 5.2.3. Mesh networks between drones.

- Ad-hoc networks between drones use robust codes to maintain communication even in the case of mobility and blocking of some nodes.
- Channel entropy is estimated in real time for efficient allocation of radio resources.

Example 5.2.4. Control and redundancy protocols.

- Critical messages (e.g. "Land immediately!") are transmitted with Reed-Solomon codes or repeated codes for maximum reliability.
- In some military applications, the codes are combined with encryption to ensure confidentiality.

Figure 5 shows the MATLAB code – Entropy and Huffman coding for drones.

```
matlab

% Simulare a entropiei și codificare Huffman pentru mesaje drone
symbols = {'Zbor stabil', 'Vibrație', 'Defecțiune'};
p = [0.6 0.3 0.1];

H = -sum(p .* log2(p)); % entropie Shannon
fprintf('Entropia sursei: %.3f biți/simbol\n', H)

% Codare Huffman
dict = huffmandict(symbols, p);
sig = {'Zbor stabil', 'Vibrație', 'Zbor stabil', 'Defecțiune'};
huffsig = huffmanenco(sig, dict);
disp('Cod Huffman:'); disp(huffsig)
```

Figure 5. MATLAB code – Entropy and Huffman coding for drones

Below we present a complete simulation in Simulink for a noisy channel (AWGN – Additive White Gaussian Noise), adapted to the context of drone communications, along with explanations and initialization MATLAB code.

We model a communication channel between a drone and a ground station, where the transmitted signal is affected by additive white Gaussian noise. We will analyze:

- Transmitting a binary signal (e.g., 0 and 1).
- Adding noise.
- Decoding the signal.
- Comparing the transmitted and received signal.

The components of the Simulink model are shown in Table 2.

Table 2. Blocks used

Block	Function
Random Integer Generator	Generates the binary input signal (0/1)
BPSK Modulator Baseband	Signal modulation (Binary Phase Shift Keying)
AWGN Channel	Add Gaussian white noise
BPSK Demodulator Baseband	Recovers the transmitted signal
Error Rate Calculation	Compare the original signal with the received one
Scope	View signals

The steps in Simulink will be:

Step 1: Signal Generation

- Random Integer Generator: Set “M-ary number” = 2; “Sample time” = 1e-4.

Step 2: BPSK Modulation

- BPSK Baseband Modulator.

Step 3: Noisy Channel

- AWGN Channel
 - SNR (dB): start with 5 dB (you can vary 0 – 20)
 - Input signal power: set automatically or manually (for example: 1 W).

Step 4: Demodulation

- BPSK Demodulator Baseband.

Step 5: Error Calculation

- Error Rate Calculation
 - Connect "Tx" (original signal)
 - Connect "Rx" (decoded signal)
 - Enable the "Output data port" option.

Step 6: View

Scope connected to the output of the noisy channel to observe the distortions.

In figure 6 we present the MATLAB initialization code.

In the simulation we will obtain:

- If the SNR is low (ex: 0 dB), the signal will be strongly affected → high error rate.
- If the SNR is high (>10 dB), the signal is clear, and the error rate approaches 0.
- We can view the difference in the *Scope* block, as well as the error rate in the *Error Rate Calculation block*.

```
matlab

% Simulare a entropiei și codificare Huffman pentru mesaje drone
symbols = {'Zbor stabil', 'Vibrație', 'Defecțiune'};
p = [0.6 0.3 0.1];

H = -sum(p .* log2(p)); % entropie Shannon
fprintf('Entropia sursei: %.3f biți/simbol\n', H)

% Codare Huffman
dict = huffmandict(symbols, p);
sig = {'Zbor stabil', 'Vibrație', 'Zbor stabil', 'Defecțiune'};
huffsig = huffmanenco(sig, dict);
disp('Cod Huffman:'); disp(huffsig)
```

Figure 6. MATLAB initialization code

Possible extensions may be:

- Adding error correction codes (e.g., Hamming code) at the physical layer level, prior to the transmission process.
- Automatic variation of the signal-to-noise ratio (SNR) and generation of the BER (Bit Error Rate) curve, according to Fig. 7.
- Replacement of the BPSK modulation scheme with QPSK or 16-QAM, to support advanced drone communications.

The graph above illustrates the theoretical BER (Bit Error Rate) curve for BPSK modulation in an AWGN (Additive White Gaussian Noise) channel, as a function of the signal-to-noise ratio (SNR) expressed in dB.

Observations:

- At SNR = 0 dB, the error rate is high (~7.8%).
- Increasing the SNR significantly reduces the BER (to 10 dB).
- The curve drops off exponentially → shows the efficiency of BPSK under better signal conditions.

This analysis is essential in the design of drone communication systems, as it allows the choice of the appropriate modulation scheme depending on the channel conditions.

Conclusions

Mathematical models applied to drone communications constitute an indispensable foundation for the design, optimization and expansion of modern aerial transmission systems. From differential equations describing the propagation of electromagnetic waves, to the use of linear algebra in precoding, to stochastic modeling of the communication channel, mathematics provides a rigorous framework for the formalization and analysis of each technical aspect. In the context of advanced communications, such as those between drones or in 6G networks, the complexity of mathematical models increases significantly, but at the same time, their potential to support scalable, resilient and intelligent architectures also increases.

Linear algebra and signal analysis are essential components in the architecture of modern drone communications, providing both a discrete structural framework and the tools for processing signals in the time and frequency domains. Linear algebra facilitates the modeling and solving of multi-antenna (MIMO) transmission problems, channel estimation, and the application of precoding and decoding techniques using vectors, matrices, and linear transformations. In parallel, signal analysis allows the identification and extraction of useful components, noise removal, and the efficient application of modulation, multiplexing, and spectral filtering methods. The integration of these two fields allows for realistic modeling of aerial channels, treatment of fading and interference effects, and adaptive optimization of resources in real time through efficient algorithms

such as FFT and fast numerical methods. Applied examples – from topological modeling of UAV networks to adaptive frequency allocation and the use of error-correcting codes (such as LDPC) – highlight the versatility and direct applicability of these mathematical tools in dynamic environments.

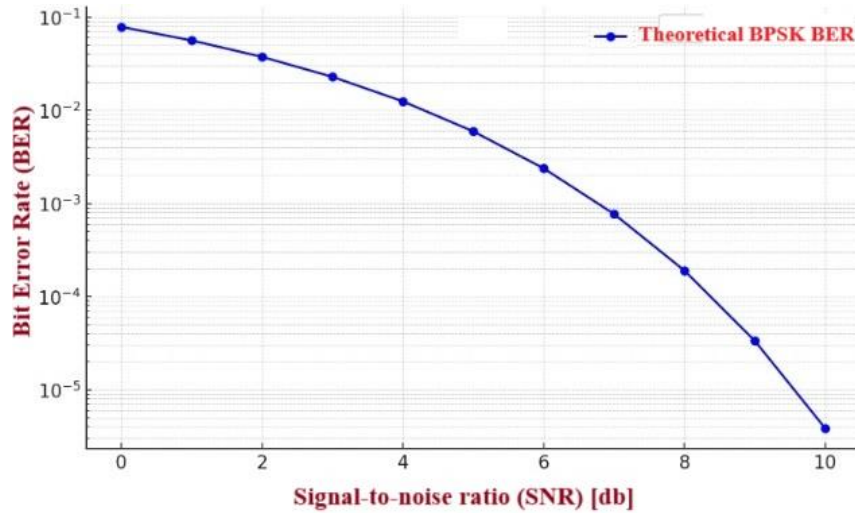


Figure 7. BER curve versus SNR for BPSK (AWGN channel)

The synergy between linear algebra and signal analysis constitutes the solid foundation of drone communications, contributing decisively to the development of reliable, efficient and scalable transmission systems. This integration not only allows communications to be supported in extreme conditions, but also creates the premises for the implementation of intelligent autonomous networks, specific to emerging applications: smart drones, aerial mesh networks, collaborative control and distributed aerial communication systems.

At the same time, probability theory and random processes play a central role in dealing with uncertainty in the communication chain – from signal generation, to transmission, detection and decision. Stochastic models allow for the realistic description of time-varying channels, error estimation, performance analysis and the design of optimal decision algorithms. In a future dominated by 6G networks, autonomous drones and mobile IoT devices, the sophistication of these probabilistic models will be an essential condition for ensuring communication reliability.

On this foundation, the importance of mathematical transforms, especially Fourier and Laplace, as indispensable tools in the analysis and design of communication systems integrated in drones arises. The Fourier transform allows for the spectral analysis of signals, necessary for frequency data manipulation, while the Laplace transform provides a formal framework for the description and control of continuous dynamic systems. The integration of these methods into embedded drone platforms directly contributes to flight stabilization, increased transmission efficiency and automation of the decision-making process.

Last but not least, Shannon's information theory provides a solid foundation for understanding communication boundaries – defining key concepts such as entropy, channel capacity, source and channel coding. In drone applications, entropy is essential for efficient data compression, channel coding protects against errors and packet loss, and channel capacity guides the choice of optimal wireless technologies for different environments. The practical implementation of these concepts ensures fast, robust and adaptable transmissions, even in hostile, noisy or highly spectrally congested environments.

Therefore, the synthesis of these mathematical directions – linear algebra, signal analysis, random processes, transforms and information theory – outlines a solid theoretical architecture, based on which intelligent, autonomous and resilient aerial networks can be developed. These foundations not only enable efficient communication between drones, but also provide the necessary support for future technological developments in the field of distributed aerial communications.

Bibliography

1. COVER, T. M., THOMAS, J. A. *Elemente de teoria informației* (trad. adapt.). Editura Tehnică, 2006.
2. HAYKIN, S. *Sisteme de comunicații moderne*. Editura Teora, 2009.
3. LEON-GARCIA, A. *Probabilități și procese aleatoare pentru ingineria electrică* (Ed. a 2-a, trad.). Editura MatrixRom, 2011.
4. MITRA, S. K. *Procesarea digitală a semnalelor*. Editura Teora, 2010.
5. OPPENHEIM, A.V., WILLSKY, A.S. *Semnale și sisteme*. Editura Polirom, 2014.
6. PAPOULIS, A., PILLAI, S. U. *Teoria probabilităților și aplicațiile sale*. Editura Tehnică, 2002.
7. PROAKIS, J. G., SALEHI, M. *Comunicarea digitală* (Ed. a 5-a). Editura Tehnică, 2008.
8. SHANNON, C. E. O teorie matematică a comunicării. In: *Bell System Technical Journal*, 1948. 27(3), pp. 379–423; 27(4), pp. 623–656.
9. STRANG, G. *Algebră liniară și aplicațiile sale*. Editura MatrixRom, 2016.
10. TSE, D., VISWANATH, P. *Fundamentele comunicării wireless*. Editura Cambridge, 2005. (ediție românească disponibilă online parțial).
11. VITERBI, A. J., OMURA, J. K. *Principii de comunicații digitale și detecție*. Editura Wiley, 1979/2005.

UDC: 514.112.4

THEORETICAL FOUNDATIONS OF PLANE GEOMETRY WITH APPLICATIONS IN THE METRIC ANALYSIS OF CONVEX PATRULATERIES

Dorin AFANAS, PhD, Associate Professor

<https://orcid.org/0000-0001-7758-943X>

e-mail: afanasdde@gmail.com

Lilia BUNDIUC, final-year student

e-mail: bundiucilia@gmail.com

"Ion Creangă" State Pedagogical University from Chisinau, Republic of Moldova

Abstract. The paper aims to rigorously substantiate the essential concepts of plane geometry, providing a coherent theoretical framework for the study of geometric figures, with an emphasis on convex quadrilaterals. In the first part, the basic notions of plane geometry are presented – points, lines, angles, distances – as well as the classification and fundamental properties of triangles and quadrilaterals. The emphasis is on the precise definition of convex figures and their characteristic metric relations.

In the second part of the paper, convex quadrilaterals are analyzed in detail from a metric perspective, using geometric, trigonometric and analytical methods. The importance of these figures in the construction and demonstration of fundamental theorems of geometry, as well as in educational and technical-scientific applications, is highlighted.

The results obtained confirm that the study of convex quadrilaterals, in the context of plane geometry, contributes to the development of a deep understanding of spatial relations and metric properties, constituting a solid basis for advanced approaches in the field of applied mathematics and geometric education.

Keywords: plane geometry, convex figures, quadrilaterals, metric relations, fundamental theorems, mathematical education.

FUNDAMENTE TEORETICE ALE GEOMETRIEI PLANE CU APLICAȚII ÎN ANALIZA METRICĂ A PATRULATERELOR CONVEXE

Rezumat. Lucrarea își propune să fundamenteze riguros conceptele esențiale ale geometriei plane, oferind un cadru teoretic coerent pentru studiul figurilor geometrice, cu accent pe patrulaterelor convexe. În prima parte, sunt prezentate noțiunile de bază ale geometriei plane – puncte, drepte, unghiuri, distanțe – precum și clasificarea și proprietățile fundamentale ale triunghiurilor și patrulaterelor. Accentul cade pe definirea precisă a figurilor convexe și pe relațiile metrice caracteristice acestora. În a doua parte a lucrării, sunt analizate în detaliu patrulaterelor convexe din perspectivă metrică, utilizând metode geometrice, trigonometrice și analitice. Se evidențiază importanța acestor figuri în construcția și demonstrarea unor teoreme fundamentale ale geometriei, precum și în aplicații educaționale și tehnico-științifice. Rezultatele obținute confirmă faptul că studiul patrulaterelor convexe, în contextul geometriei plane, contribuie la dezvoltarea unei înțelegeri profunde a relațiilor spațiale și a proprietăților metrice, constituind o bază solidă pentru abordări avansate în domeniul matematicii aplicate și al educației geometrice.

Cuvinte-cheie: geometrie plană, figuri convexe, patrulater, relații metrice, teoreme fundamentale, educație matematică.

Introduction

Plane geometry is one of the oldest and most fundamental branches of mathematics, with roots in ancient civilizations, where it was initially developed out of practical needs, such as measuring land or constructing buildings. In its modern axiomatic form, plane geometry has its foundations in the Euclidean system formulated in *Euclid's Elements*, a work that profoundly influenced the evolution of mathematics for over two millennia. This framework is based on primary notions such as the point, the line, and the plane, on the axioms that govern them, and on the logical deduction of geometric properties, giving geometry a deductive and rigorous character.

In the context of Euclidean plane geometry, geometric figures are central objects of study, through which spatial relationships, congruence, similarity, distances and angles are investigated. Among these, convex figures, especially polygons, occupy a special place due to their analytical and structural properties. A figure is convex if, for any two points in its interior, the segment joining them lies completely inside the figure – an essential condition for ensuring regular and predictable geometric behaviors.

In particular, convex quadrilaterals, i.e. polygons with four sides that satisfy the convexity condition, provide a natural geometric framework for the formulation and verification of metric theorems, inequalities, constructions, and optimization methods. They are ubiquitous in practical applications in architecture, computer science, mechanics, and mathematics education. Their study involves a detailed analysis of the relationships between sides, angles, diagonals, and areas, using both classical methods (geometric constructions, elementary proofs) and modern approaches (vectors, matrices, Cartesian coordinates, dynamic geometry software).

From a didactic perspective, convex figures and their properties represent a point of confluence between visual and analytical thinking, favoring the development of geometric intuition and problem-solving skills. They allow the formulation and demonstration of general results, but also the exploration of particular cases, favoring learning through discovery.

In conclusion, plane geometry, through the rigorous study of convex figures, provides an ideal framework for the development of both a solid theoretical background in mathematics and critical thinking and geometric modeling skills. In this article, the emphasis is placed on the theoretical foundations that govern the metric behavior of plane figures, with a special interest in convex quadrilaterals, as a relevant example of synthesis between the abstract and the applicable.

The choice of the topic is justified both by its historical importance in the formation of mathematical thinking and by its current relevance in education, research and interdisciplinary applications [6 – 8]. Plane geometry constitutes one of the basic components of the mathematics curriculum, being the first form of rigorous mathematical

knowledge with which pupils and students interact systematically. It provides an ideal framework for initiation into deductive reasoning, the analysis of spatial relationships and the construction of logical demonstrations – skills essential for the formation of scientific thinking.

In particular, quadrilaterals — as polygons with four sides — represent a particularly significant thematic core in plane geometry. These figures synthesize multiple fundamental concepts, from congruence and parallelism to symmetries, metric invariants and geometric constructions. Quadrilaterals appear not only in theoretical contexts, but also in numerous applied situations [1 – 5]: in the modeling of architectural spaces, in the generation of two-dimensional graphic networks, in the optimization of mechanical structures or in the visualization of geometric data in CAD and GIS programs. Moreover, the metric approach to convex quadrilaterals provides a rich framework for analysis, by investigating the relationships between lengths, angles, areas and diagonals [9 – 11]. This type of analysis stimulates both a deep understanding of geometric properties and the ability to transfer knowledge in varied contexts, such as mathematics olympiads, fundamental research or STEAM education.

Therefore, the proposed topic aims to consolidate the essential theoretical foundations of plane geometry and systematically explore convex quadrilaterals, not only as geometric objects, but also as points of convergence between theory, application and pedagogy. Their study contributes to the formation of a coherent perspective on geometric logic, providing a solid basis for advanced learning and the applicability of mathematics to real-world problems.

The present paper aims to rigorously analyze the theoretical foundations of plane geometry, with a special emphasis on the properties and metric relations of convex figures, in particular quadrilaterals. Through a systematic and deductive approach, the following main objectives are sought:

- Systematizing the fundamental concepts of Euclidean plane geometry, by highlighting the basic notions (point, line, angle, distance), the axiomatic principles and the essential theorems used in the study of plane figures.
- Classification and characterization of convex quadrilaterals, both from the perspective of geometric definitions and properties, and from the point of view of the metric criteria that differentiate them (lengths, angles, areas, diagonals).
- Investigation of fundamental metric relations within convex quadrilaterals.
- Carrying out a comparative analysis between various types of quadrilaterals, highlighting the symmetry elements, the conditions of inscription in a circle or tangent to a circle, and the metric implications of these properties.

- Illustrating the applicability of theoretical results by solving representative geometric problems, selected from the specialized literature and from mathematical competitions, which capitalize on the metric properties studied.
- Establishing a teaching and epistemological framework for integrating these concepts into the teaching-learning process of geometry, offering a coherent vision between theoretical rigor and educational accessibility.

By achieving these objectives, the work aims not only to consolidate fundamental knowledge on plane geometry, but also to highlight the essential role that convex quadrilaterals play in the development of geometric thinking and its application in mathematical and interdisciplinary contexts.

The methodology adopted in this work is part of the paradigm of fundamental research, aiming at the rigorous theoretical analysis of geometric concepts and relations in the Euclidean plane, with an emphasis on the metric structure of convex figures, especially quadrilaterals. The research process was based on a combination of deductive, analytical and comparative methods, complemented by geometric modeling and demonstrative applications.

The central element of the methodology is deductive reasoning, specific to pure mathematics. For the study of convex quadrilaterals, metric analysis was used, focused on identifying the relationships between the elements of the figure: lengths of the sides and diagonals, measures of the angles, heights, areas, semi-perimeters, etc. This method allowed the comparative evaluation of different types of quadrilaterals and the highlighting of distinctive characteristics.

To support the theoretical interpretations, geometric constructions were made, which facilitated the visual simulation of metric properties and was useful in identifying additional relations or conjectures. These models also had a didactic role, providing a concrete representation of the geometric abstract.

Another methodological tool was the comparison and classification of metric theorems that apply to convex figures, especially in the particular cases of inscribed or tangent quadrilaterals. This method aimed to delimit the conditions of applicability, the limits and the possible generalizations.

This methodology offers a rigorous and balanced framework, adapted to both the requirements of theoretical mathematical research and those of educational applicability, thus contributing to the consolidation of a valid, relevant and replicable scientific approach.

1. General notions of plane geometry: points, lines, angles, distances

Plane geometry, in its classical Euclidean form, is based on a set of primitive concepts and axioms that are not demonstrated, but accepted as self-evident, from which all other propositions and theorems are then deduced. At the heart of this system are the fundamental

notions of *point*, *line*, *angle*, and *distance*, essential for any geometric construction and for understanding two-dimensional spatial relationships.

♦ **The point:** is defined as a geometric object without dimensions, which represents a precise position or location in the plane. In Euclidean geometry, the point is a primitive entity, that is, it is not defined by other concepts, but is accepted intuitively. Its graphical representation is conventional (by a small spot or dot on paper), and symbolically it is denoted by capital letters: A , B , P .

♦ **Right line:** is an infinite sequence of points that extends in both directions without beginning or end, having only one dimension – length. It is considered a perfectly rectilinear and infinite geometric shape, and is also a primitive concept. A line can be determined by two distinct points A and B , being denoted either by AB , either with a lowercase letter, for example d .

The axioms of Euclidean geometry state that through two distinct points there passes one and only one straight line.

♦ **Angle:** is the geometric figure formed by two half-lines that have the same origin, called the vertex of the angle. The measure of the angle expresses the opening between the two half-lines and is expressed in sexagesimal degrees ($^\circ$), radians or other angular units.

Formally, an angle is a geometric quantity associated with rotation between two directions and can be:

- sharp ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$);
- right ($\alpha = 90^\circ$);
- obtuse ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$);
- obtuse or concave ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$).

In plane geometry, angles are essential entities for defining triangles, quadrilaterals, and for studying the relationships of perpendicularity, parallelism, and symmetry.

♦ **Distance:** the distance between two points A and B in the plane is a positive numerical value expressing the length of the segment AB , and is one of the most important metric notions of plane geometry. The fundamental properties of distance include:

- Symmetry: $d(A, B) = d(B, A)$;
- Identity: $d(A, B) = 0$ if and only if the points A and B coincide;
- Triangular inequality: $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

Within a rectangular Cartesian coordinate system, the distance between two points $A(x_1; y_1)$ and $B(x_2; y_2)$ is given by the formula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

This formula is the foundation of analytical methods in plane geometry and is frequently used to calculate the length of segments, the diagonal in quadrilaterals, and in determining the geometric locus of points.

By understanding and correctly using these fundamental notions, the conceptual basis necessary for exploring more complex geometric structures, such as convex polygons, is provided, and for developing the metric theorems that underlie all of plane geometry.

2. Triangles and quadrilaterals – definitions and classifications

In plane geometry, the study of polygonal figures is an essential component in understanding the structure of two-dimensional space. Among the most fundamental and frequently used figures are triangles and quadrilaterals, which serve both as basic elements in geometric constructions and as support for the formulation and demonstration of general theorems regarding metric and angular relationships.

◆ **Triangles – definitions and classifications.** A triangle is a three-sided polygon formed by joining three non-collinear points in the plane, called vertices. The segments joining these points constitute the sides of the triangle, and the angles formed at the intersection of the sides represent the interior angles of the triangle.

The classification of triangles can be done:

I. By the length of the sides:

- Equilateral triangle – all three sides are congruent: $[AB] = [BC] = [CA]$, and all the interior angles measure 60° (fig. 1).
- Isosceles triangle – two sides are congruent: $[AB] = [AC]$, and the angles opposite them are congruent (fig. 2).
- Scalene triangle – all sides have different lengths, and the interior angles are distinct (fig. 3).

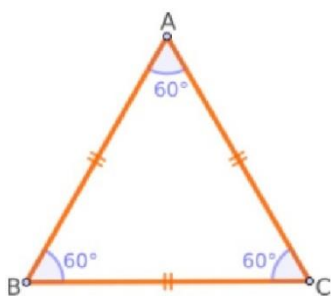


Figure 1. Equilateral triangle

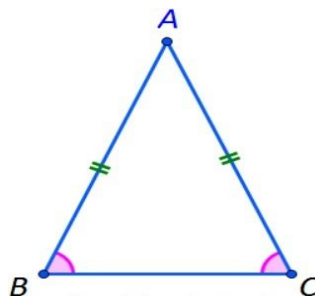


Figure 2. Isosceles triangle

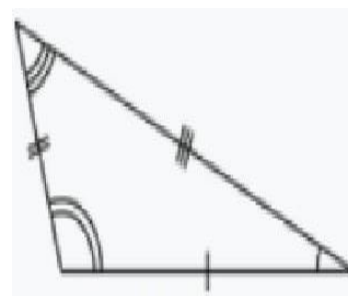


Figure 3. Scalene triangle

II. By measuring the angles:

- Acute-angled triangle – all interior angles have measures less than 90° (fig. 4).
- Right triangle – has one right angle (90°); the side opposite the right angle is called the hypotenuse (fig. 5).
- Obtuse triangle – has an angle with a measure greater than 90° (fig. 6).

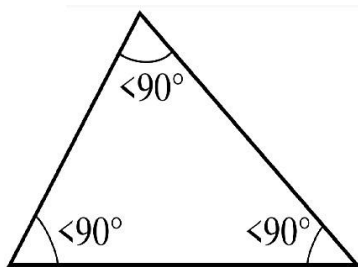


Figure 4. Acute angle triangle

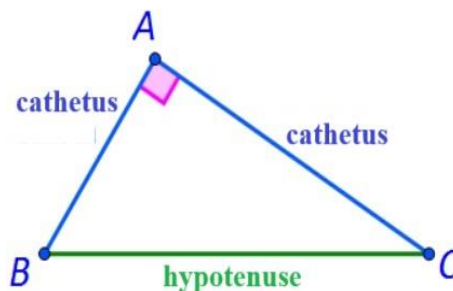


Figure 5. Right triangle

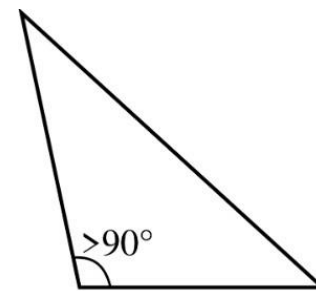


Figure 6. Obtuse triangle

Triangles are fundamental figures because any convex polygon can be divided into a finite number of triangles, and numerous geometric theorems, such as the Pythagorean theorem, the median theorem, or the vertex opposite angles theorem, are initially formulated within the triangle and then generalized.

♦ **Quadrilaterals – definitions and classifications.** A quadrilateral is a polygon with four sides and four internal angles, whose vertices are conventionally denoted by A , B , C , D , united in order. A quadrilateral is convex if the measures of all its interior angles are less than 180° , and its diagonals intersect inside the figure.

The classification of convex quadrilaterals is carried out according to various geometric criteria:

I. According to the parallelism of the sides:

- Parallelogram – has opposite sides parallel two by two; opposite angles are congruent, and diagonals intersect in the middle (fig. 7).
- Rectangle – parallelogram with one right angle (90°); the diagonals are congruent (fig. 8).
- Rhombus – parallelogram with all sides congruent; diagonals are perpendicular and bisect each other (fig. 9).

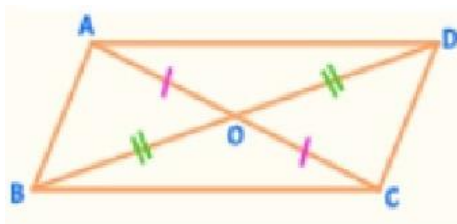


Figure 7. Parallelogram

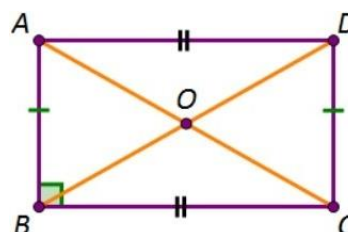


Figure 8. Rectangle

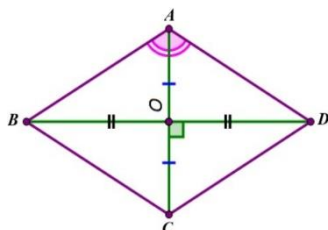


Figure 9. Rhombus

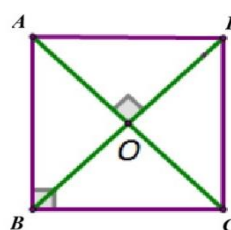


Figure 10. Square

- Square – has all the properties of a rectangle and a rhombus; it is the quadrilateral with the highest degree of symmetry (fig. 10).
- Trapezoid – has only one pair of parallel opposite sides (fig. 11).
 - Isosceles trapezoid – the non-parallel sides are congruent, and the angles at the large base are congruent (fig. 12).
 - Rectangular trapezoid – has two right angles (fig. 13).
- Kite (deltoid) – has two pairs of congruent adjacent sides; the diagonals are perpendicular, one being the axis of symmetry (fig. 14).

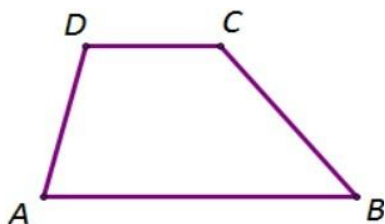


Figure 11. Any trapezoid

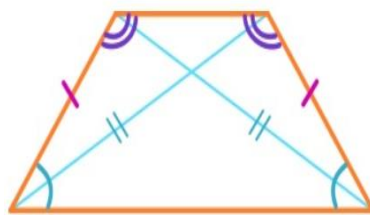


Figure 12. Isosceles trapezoid

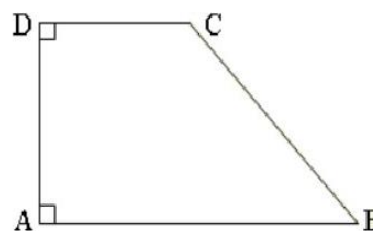


Figure 13. Rectangular trapezoid

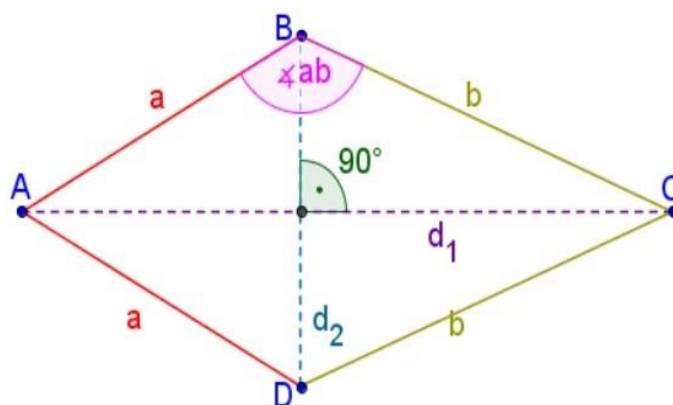


Figure 14. Kite (deltoid)

II. After inscribing a circle or tangent to a circle:

- Cyclic quadrilateral – can be inscribed in a circle; the sum of the measures of the opposite angles is equal to 180° (fig. 15).
- Tangential quadrilateral – admits a circle tangent to all sides; the sum of the lengths of the opposite sides is equal (fig. 16).

This classification allows quadrilaterals to be treated not just as simple polygonal figures, but as figures with distinct metric properties, which can be investigated by geometric, trigonometric, or analytical methods.

The systematic study of triangles and quadrilaterals provides a solid basis for the development of the theory of plane figures, constituting the foundation on which metric relations and advanced theorems in plane geometry are built.

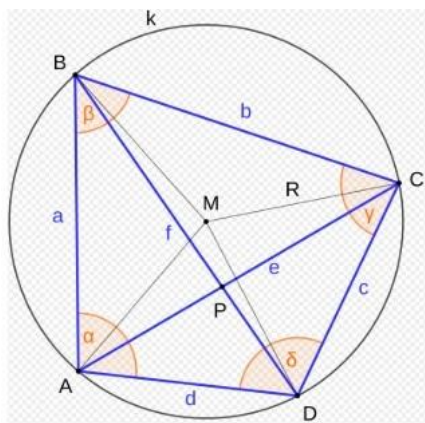


Figure 15. Cyclic quadrilateral

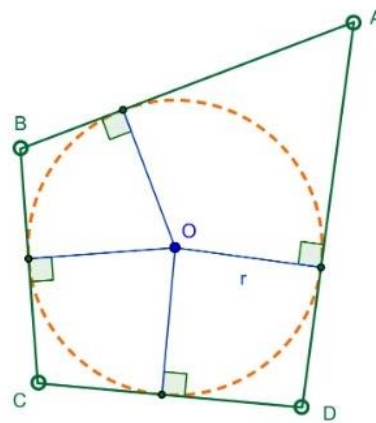


Figure 16. Tangential quadrilateral

3. Fundamental properties of convex quadrilaterals

Convex quadrilaterals are an essential class of geometric figures studied in plane geometry, characterized by topological stability and predictable metric behavior. Beyond their simple definition as polygons with four sides and four angles, these figures acquire particular importance due to the metric, angular, and structural properties that differentiate them and make them useful in theory and applications.

Definition 3.1. *A convex quadrilateral is a polygonal figure with four vertices and four sides, in which the measures of all interior angles are less than 180° , and any segment that joins two points inside the figure lies completely inside it.*

Convexity ensures predictability of angles and regular geometric behavior, essential aspects in theoretical and practical treatment.

- The sum of the measures of the angles of a convex quadrilateral. One of the most fundamental properties is that the sum of the measures of the interior angles of any convex quadrilateral is constant and equal to 360° :

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360^\circ.$$

This relationship derives directly from dividing the quadrilateral into two triangles, each having the sum of the measures of the angles of 180° .

- Diagonals and their intersection. The convex quadrilateral has two diagonals (AC and BD), which always intersect inside the figure. Their intersection:

- divides the quadrilateral into four adjacent triangles;
- allows the formulation of useful metric relations, including in the study of area and symmetry;
- plays a central role in the characterization of special quadrilaterals (cyclic, tangent, orthodiagonal, etc.).

- General formula for the area of a convex quadrilateral. For an arbitrary convex quadrilateral, the area does not have a universal formula, but can be expressed in terms of

the lengths of the sides and the measure of the angle between the diagonals. In special cases we have:

- Brahmagupta's formula (for cyclic quadrilaterals):

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

where $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ is the semiperimeter of the quadrilateral.

- For quadrilaterals with perpendicular diagonals:

$$A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2.$$

- Metric inequalities and symmetries. Convex quadrilaterals obey a number of metric inequalities, such as:

$$AB + CD > AD + BC \text{ or } AB + CD < AD + BC$$

depending on the shape of the quadrilateral.

Also, axial or central symmetries appear in particular cases, such as the parallelogram or rectangle, which are subclasses of convex quadrilaterals with a high degree of regularity.

- Applications of convex quadrilaterals. Due to their well-defined properties, convex quadrilaterals are frequently used in:

- computer-aided geometric modeling (CAD);
- triangulation algorithms in computer science;
- topographic measurements and architecture;
- teaching geometry in middle and high school education.

Conclusions

Plane geometry remains a fundamental field of mathematics, providing a rigorous framework for understanding spatial relationships and properties of two-dimensional figures. Its theoretical foundations – based on points, lines, angles, and distances – form the basis of all geometric construction.

Convex quadrilaterals are central figures in the study of plane geometry, due to their combination of structural simplicity and metric complexity. Their classification and analysis allow the development of relevant theorems and applications in various contexts, from education to geometric engineering.

The metric analysis of convex quadrilaterals – through geometric, trigonometric and analytical methods – highlights the deep connections between the formal properties of the figures and the numerical relationships that characterize them. This analysis contributes not only to theoretical understanding, but also to the formation of spatial reasoning and mathematical argumentation skills.

The paper demonstrates that the integrated approach to plane geometry, combining fundamental theory with concrete applications, can lead to deeper learning and the

development of structural mathematical thinking, essential in professional and scientific training.

New directions of research and applicability are thus opened, such as the extension of metric analysis to general polygons, the use of computer tools for geometric visualization, as well as the integration of concepts into the modern educational curriculum, especially in teaching based on investigation and geometric modeling.

Bibliography

1. AFANAS, D., BRIGALDA, A. Modeling of broken lines through drones. In: *Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale, (concept STEAM)*, Ed. Ediția a 4-a, 27-28 octombrie 2023. Chișinău: CEP UPSC, 2024, Ediția 4, pp. 72-83. ISBN 978-5-86654-132-4.
2. BRANZEI, S. *Elemente de geometrie sintetică și analitică*. Editura Universității din București, 2006.
3. COJOCARU, D. *Geometrie analitică în plan*. Iași: Editura Junimea, 1998.
4. CORIOLAN, T. *Fundamentele geometriei plane*. Iași: Editura Polirom, 2013.
5. MARINESCU, C. *Geometrie și trigonometrie. Probleme și aplicații*. București: Editura Didactică și Pedagogică, 2001.
6. MIHAILESCU, A., DUMITRESCU, V. *Metode moderne de predare a geometriei*. Pitești: Editura Paralela 45, 2002.
7. POPA, G. *Geometrie elementară. Figuri plane și în spațiu*. București: Editura Didactică și Pedagogică, 2004.
8. RAILEANU, L. *Geometrie. Curs pentru învățământul preuniversitar și universitar*. București: Editura Matrix Rom, 2010.
9. SAVU, I. *Structuri geometrice și aplicații didactice*. Craiova: Editura Didactica Nova, 2009.
10. STOICA, E. *Matematica în gimnaziu și liceu. Elemente de geometrie și aplicații practice*. București: Editura Pro Universitaria, 2017.
11. TOMA, A. *Teoria figurilor geometrice plane*. Craiova: Editura Universitaria, 2016.

UDC: 37.091.3:51(075.2)(478+498):004

ACTIVITĂȚI INTERACTIVE PENTRU MANUALELE DIGITALE DE MATEMATICĂ, CLASA A V-a.

STUDIU DE CAZ: ROMÂNIA – REPUBLICA MOLDOVA

Nicolae BALMUȘ, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-0491-2918>

e-mail: balmus.nicolae@upsc.md

Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale

Mariana-Denisa UNGUREANU (ZAHIU), doctorandă

<https://orcid.org/0009-0006-6803-9106>

e-mail: m.zahiu@yahoo.com

Școala Doctorală Științe ale Educației

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. Tehnologiile de creare a manualelor digitale se dezvoltă în mod continuu. La momentul actual se dezvoltă tehnologii în baza cărora utilizatori creează manuale cu content digital personalizat și redactabil. În această lucrare sunt descrise tehnologii de crearea a unor resurselor digitale interactive, specifice manualelor de matematică pentru învățământul gimnazial din România și Republica Moldova.

Cuvinte cheie: manuale digitale interactive, resurse educaționale digitale, programare vizuală, software educaționale, evaluare asistată de calculator.

INTERACTIVE ACTIVITIES FOR DIGITAL MATHEMATICS TEXTBOOKS, GRADE 5. CASE STUDY: ROMANIA – REPUBLIC OF MOLDOVA

Abstract. Technologies for creating digital textbooks are continuously developing. Currently, technologies are being developed based on which users create textbooks with personalized and editable digital content. This paper describes technologies for creating interactive digital resources, specific to mathematics textbooks for secondary education in Romania and the Republic of Moldova.

Keywords: interactive digital textbooks, digital educational resources, visual programming, educational software, computer-assisted assessment.

1. Introducere

Manualele digitale interactive de matematică pentru clasele gimnaziale se realizează în România începând cu anul 2015. În format digital-interactiv aceste manuale sunt plasate pe site-ul <https://www.manuale.edu.ro/>. La momentul actual, pentru clasa a V-a sunt disponibile 7 variante de manuale, realizate în conformitate cu programa școlară în vigoare [1]. De regulă, aceste manuale conțin 3 tipuri de activități multimedia interactive de învățare (AMII): imagini statice, secvențe audio/video și activități interactive cu feedback imediat. De exemplu, manualul digital „Matematica” clasa a V-a elaborat în cadrul editurii „Paralela 45” [2] conține: 60 de secvențe audio/video, 97 imagini statice și 47 activități interactive de învățare de tipul (trage și plasează, bifează varianta corectă, asociază termeni

în coloane). Ponderea activităților interactive de învățare cu feedback imediat în acest manual este de 23%. În celelalte manuale, această pondere este de același ordin.

Utilizatori activi ai manualelor digitale de matematică (profesorii/elevii) apreciază înalt aplicațiile interactive cu feedback imediat, dar consideră că ponderea lor este mult prea mică în raport cu mulțimea mare de exerciții în care se cere de completat lacune în texte și tabele, de bifat răspunsuri corecte, de apreciere cu adevărat/fals a rezultatelor, de ordonare crescător/descrescător a valorilor numerice, de rezolvare a cuvintelor încrucișate (rebusuri) etc.

De asemenea utilizatorii activi solicită acces la resursele interne ale manualelor digitale în baza cărora conținutul manualele digitale ar putea deveni mult mai flexibile decât cel al manualele tipărite. La acest moment conținutul manualelor digitale utilizate în România este la fel de rigid ca și cel al manualelor tipărite care se modifică o dată la patru ani.

În Republica Moldova nu există manuale digitale interactive, oficial omologate de Ministerul Educației și Cercetări. La nivel de cercetare științifică, în cadrul Universității Pedagogice de Stat "Ion Creangă" din Chișinău se dezvoltă software-le MDIR Constructor cu ajutorul căruia utilizatori, în baza fișierului *.pdf al unui manual școlar omologat sau de concepție proprie, dezvoltă un manual digital interactiv cu conținut personalizat și redactabil. Drepturile de autor și conexe pentru MDIR Constructor versiunea 3.0 sunt înregistrate la AGEPI Republica Moldova [3]. Varianta digitală interactivă a manualului de Matematică clasa a V-a [4], omologat în Republica Moldova se află în proces de dezvoltare în cadrul proiectului de cercetare științifică „**Inovație în proiectarea și valorificarea manualelor digitale interactive de matematică pentru învățământul gimnazial nivel inferior**”, cifrul 25.80012.0807.42SE.

Prezentăm, în continuare, câteva activități digitale interactive, special concepute pentru manualele de matematică și incluse în versiunea curentă a software-lui MDIR Constructor.

1. Activități interactive de tipul "Completează Tabelul".

În manualele de matematică pentru clasele primare și gimnaziale frecvent sunt formulate sarcini de tipul: **Reproduceți și completați tabelul, Copiați pe caiet și completați tabelul etc.** Două exemple de astfel de sarcini sunt reproduse în Fig.1.

Procesul de rezolvare a exercițiilor de acest tip poate fi divizat în 3 etape:

1. Reproducerea/copierea în caietul elevului sau pe tablă;
2. Rezolvarea și completarea celulelor tabelului;
3. Verificarea corectitudinii rezolvării.

Cronometrarea acestui proces arată că majoritatea timpului se folosește pentru reproducerea trivială a tabelului în caietul elevului. Completarea celulelor tabelului, de asemenea este ergonomică, dar utilă, deoarece în acest timp se dezvoltă competențele

vizate în programa școlară. Verificarea corectitudinii rezolvării testului nu poate fi realizată de către elevi, deoarece, de regulă, exercițiile de acest tip nu au răspunsuri în manual.

Reproduceți și completați tabelul după model:

Numărul zecimal	Rotunjirea până la unități	Rotunjirea până la zecimi	Rotunjirea până la sutimi
12,756	13	12,8	12,76
0,805	1	0,8	0,81
3,418			
0,004			
174,23			
91,0103			
45,607			
2,7891			

5. Copiază pe caiet și completează tabelul:

a	b	c	$a + c$	$a + b + c$	$a - b$	$b - c$
107	59	34				
205	43			268		
	472	305	1 085			
2 491					1 291	407
			931	1 509		371

Figura 1. Exemple de sarcini de tipul ” Completează tabelul...” [2, 4]

Pentru rezolvare asistată de calculator a exercițiilor de tip ”Completează tabelul” în mediul de programare Delphi au fost create două aplicații: TabelTestCreator cu ajutorul căreia utilizatorul creează fișierul sursă al testului și TabelTestEvaluator care, în baza fișierului sursă realizează interfața grafică în care utilizatorul rezolvă exercițiul și verifică corectitudine cu feedback imediat. Aceste aplicații sunt încorporate în software-le MDIR Constructor.

Aplicația TabelTestCreator, în MDIR Constructor se accesează prin meniul MDIR Tools>Resource Builders> Completează Tabele (fig.2)

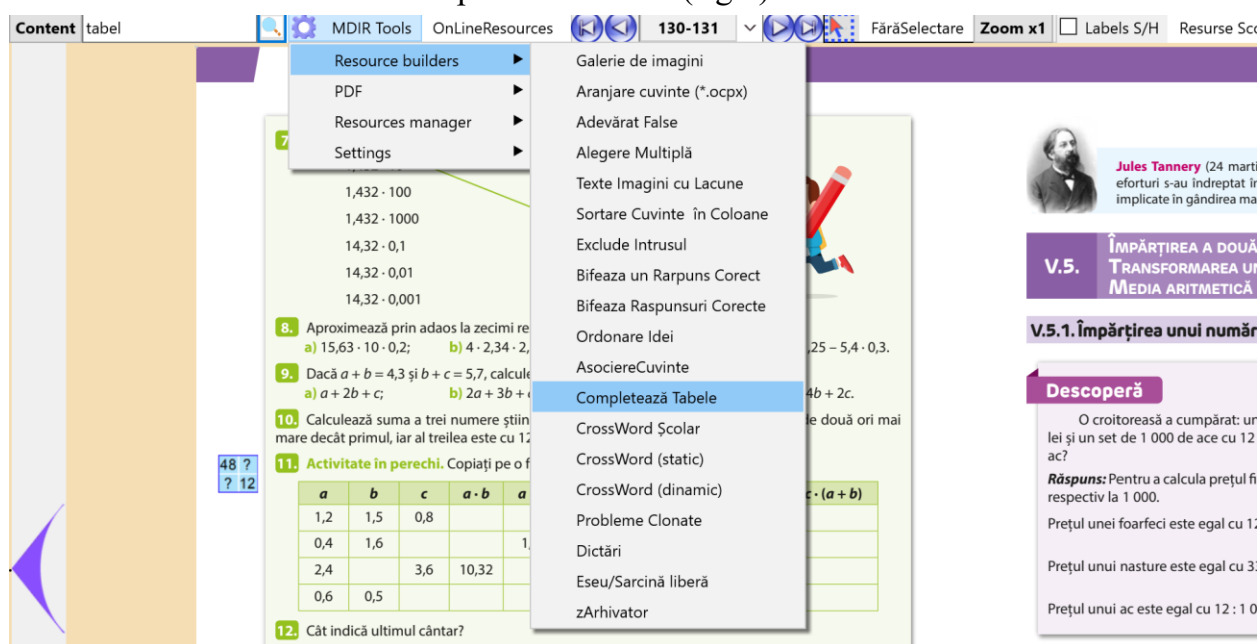


Figura 2. Accesarea aplicației TabelTestCreator, încorporată în MDIR Constructor

Ca urmare se deschide aplicația TabelTestCreator cu ajutorul căreia utilizatorul creează fișierul sursă al exercițiului în conformitate cu scenariul descris în manual sau conceput de utilizator (fig.3).

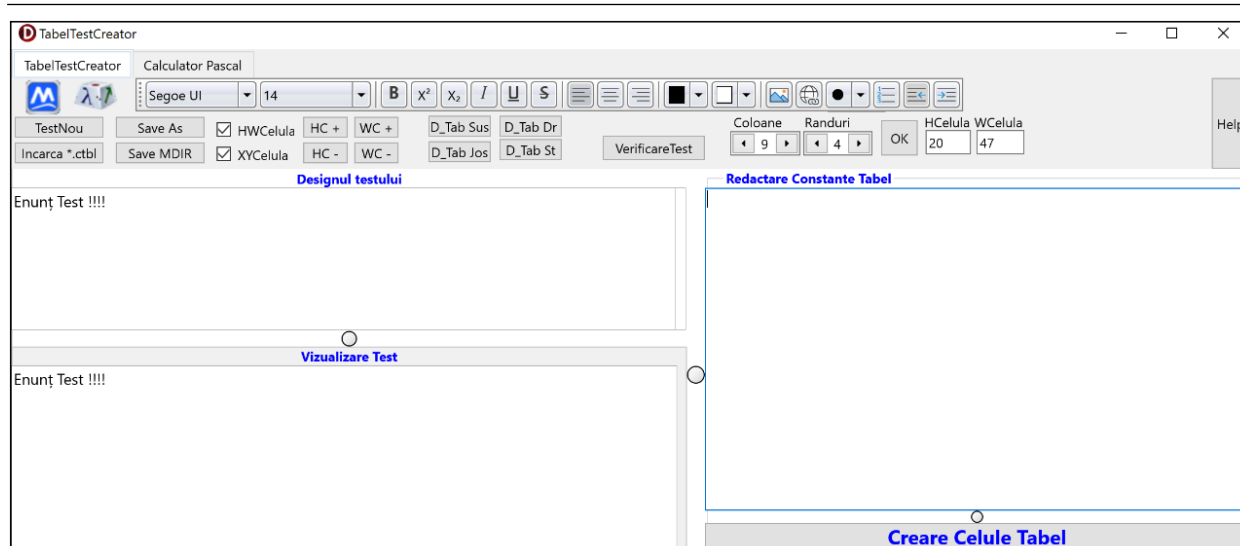


Figura 3. Interfața aplicației Tabel Test Creator

Pentru realizarea testului, utilizatorul parcurge următoarele etape:

1. Se setează numărul de coloane și de linii pentru tabel. Pentru exercițiul 11 de la pagina 130 [2] au fost setate 9 coloane și 4 linii.
2. Se apasă butonul OK. Ca urmare în fereastra Redactare Constante Tabel apar spațiile necesare pentru redactarea expresiilor în baza cărora se calculează valorile care urmează să apar în celulele tabelului. Pentru aceste scopuri în MDIR Constructor este inclus un evaluator de expresii matematice care la acest moment recunoaște operațiile matematice și funcțiile prezente în fig. 4.

Operații:
+, -, *, / div, mod - pentru valori Integer;
x, : - înmulțire, împărțire;
^ - ridicare la putere ($2^3=8$)

Funcții:
random(n) - generează numere aleatoare întregi (0..(n-1))
sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sqrt(x), arctan(x), arcsin(x), arccos(x), arccot(x), exp(x), abs(x), ln(x)
pi (3.14.....), e (2.71828...- numărul natural)
round(x), trunc(x), int(x), power(x,y), random(x)
roundN(x,n) - rotundirea numărului real x până la n cifre după virgula
randR(n1,n2)- generator de numere aleatoare n1,n1+1,...(n2-1)
randG(xm,est)- generator numere aleatoare Gauss
atan2(y,x) - calculează unghiul în radiani în sens trigonometric atan2(-2,2)*180/pi=315
min(x,y) - calculează valoarea minimală dintre x și y, Ex min(4,3)=3
max(x,y) - calculează valoarea maximală dintre x și y, Ex max(1,3)=3
cmmdc(x,y) - calculează cel mai mic divizor comun
cmmmc(x,y) - calculează cel mai mare multiplu comun
fac(x) - calculează factorialul fac(3)=3!=6
rst(x) - calculează rasturnatul numărului rst(123)=321
if(x,y)-compară x,y; dacă x<y, if=-1; x=y, if=0, x>y, if=1;
([2+3]+5)+7)- simboluri pentru paranteze
Numere naturale în format roman<=3999 (I, II.....MMMCMXCIX)
snabp(a,b,p)- calculează suma numerelor naturale de la a până la b cu pasul p

Figura 4. Operații și funcții predefinite în minicalculatorul MDIR Constructor

3. Se apasă butonul Creare Celule Tabel. Ca urmare în fereastra Designul Testului apare tabelul cu numărul solicitat de celule, notate prin K00, K01, etc. Poziția tabelului pe

fundalul enunțului testului se ajustează cu ajutorul butoanelor D_Tab Sus, Jos, Stânga, Dreapta.

- Se apasă butonul Vizualizare Test. Ca urmare în fereastra Vizualizare Test apare tabelul cu informația generată în baza algoritmului implementat la etapa 2.
- Dacă datele în celulele tabelului se generează corect se trece la etapa finală: în fereastra Design Test, celulele tabelului pentru care informația urmează să fie ascunsă se notează cu xxx. După reapăsarea butonului Vizualizare Test, interfața aplicației este prezentată în fig.5.

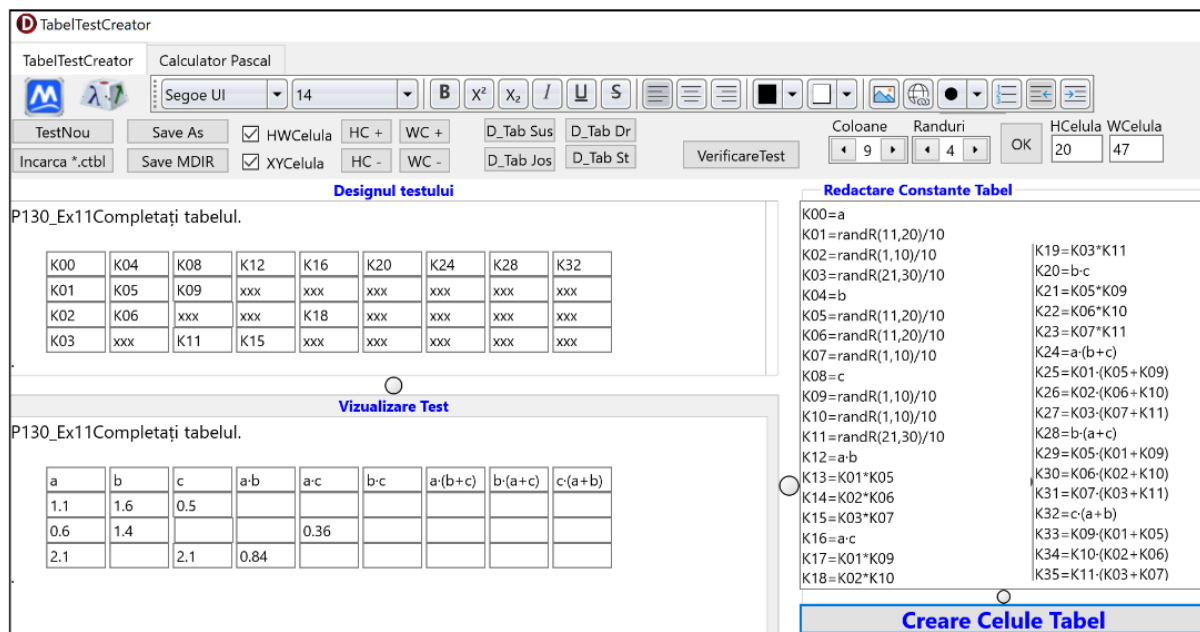


Figura 5. Designul aplicație la etapa de finalizare a testului

- Se apasă butonul SaveAs, care afișează fereastra de dialog cu ajutorul căreia se salvează testul creat, într-un fișier cu extensia *.ctlb.
- Includerea aplicațiilor de tip Completează tabelul în pagina manualului digital se realizează cu ajutorul meniului ResourcesManager > InPage>Add. Cu ajutorul ferestrei de dialog care apare se selectează tipul și fișierul aplicației care urmează să fie inclusă în pagina manualului (în cazul dat Completează Tabel, fișierul P130Ex11.ctlb, creat cu ajutorul aplicației Tabel Test Creator). Se ajustează poziția pictogramei  în pagina manualului și se apasă butonul Save.

După realizarea acestor etape aplicația este inclusă în pagina manualului și poate fi accesată prin, dublu click cu mouse-lui pe pictograma aplicației. Ca urmare pe fundalul paginii manualului apare fereastra aplicația TabelTestEvaluator cu ajutorul căreia, utilizatorul rezolvă testul prin completarea celulelor tabelului cu informație numerică sau expresii simple, în cazul când rezultatul este o fracție ordinară (ex; $1/3$), o fracție periodică (ex: $1.1(3)$), etc (fig,5)

rebusului pe caietul elevului. Pentru aceste scopuri în MDIR Constructor este incorporată aplicația Crossword Școlar Creator cu ajutorul căreia utilizatorii creează fișiere sursă în baza cărora activitățile interactive de rezolvare a rebusurilor se includ în paginile manualului. În MDIR Constructor, aplicația se accesează prin intermediul meniului MDIR Tools> Resource Builders> Crossword Școlar Creator. Ca urmare se deschide fereastra Crossword Școlar Creator (fig.8).

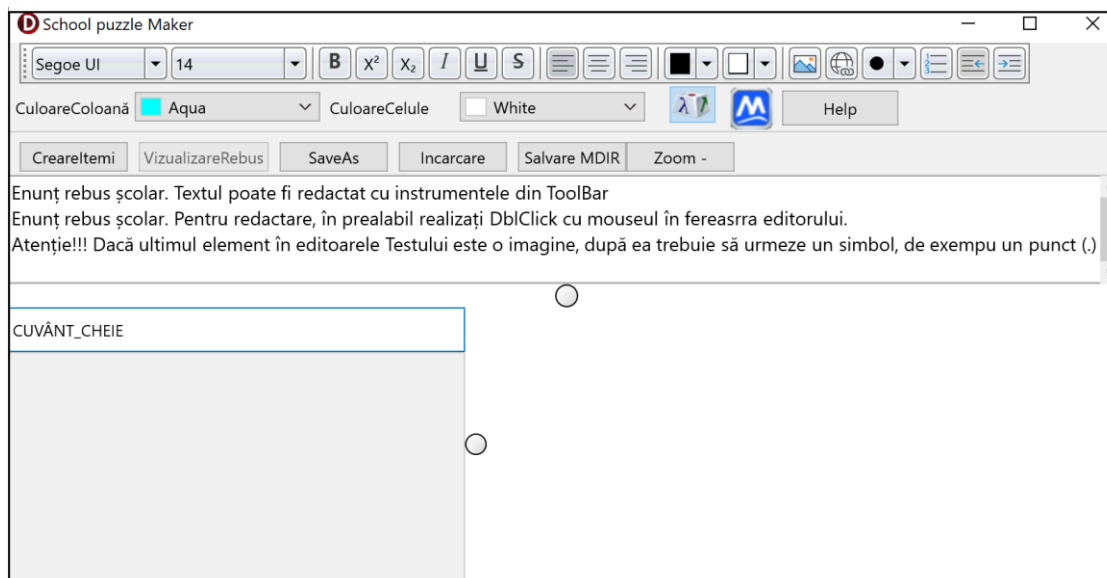


Figura 8. Fereastra aplicației Rebus Școlar Creator, etapa inițială

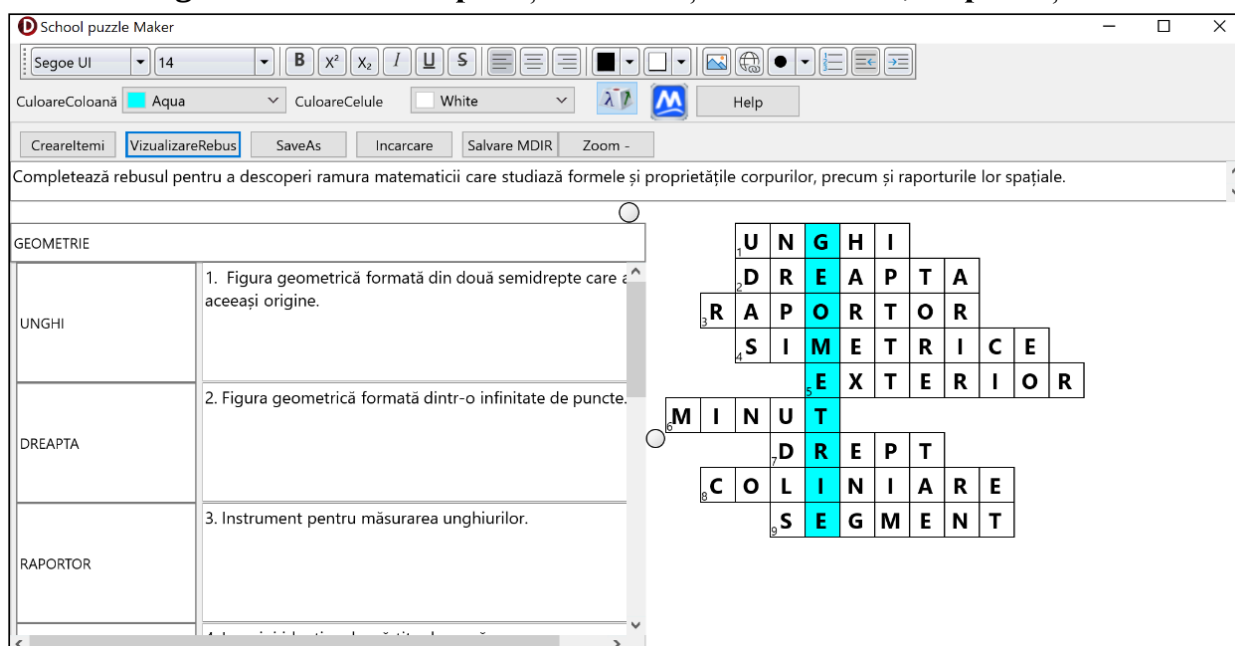


Figura 9. Fereastra aplicației Rebus Școlar Creator, etapa de verificare

La etapa inițială utilizatorul completează spațiile Enunț Rebus și CUVÂNTUL CHEIE pe care elevul trebuie să-l descopere în procesul de rezolvare a rebusului (pentru exemplul din pag. 184 .[2] se introduce cuvântul GEOMETRIE. Se apasă butonul Creare Itemi. Ca urmare apar spații pentru introducerea cuvintelor rebusului și a legendelor pentru

fiecare cuvânt. După completarea tuturor spațiilor se apasă butonul Vizualizare Rebus. Fereastra aplicație pentru această etapă este reprezentată în fig. 9.

Dacă rebusul se reproduce corect, se apasă butonul Save As pentru salvarea fișierului sură cu extensia *.rbsc (P184_rebus.rbsc).

Includerea în pagina manualului digital a aplicațiilor de tip Rebus Școlar se realizează cu ajutorul meniului ResoirsesManager > InPage>Add. Cu ajutorul ferestrei de dialog care apare, se selectează tipul și numele fișierul aplicației care urmează să fie inclusă în pagina manualului (în cazul dat Crossword școlar, fișierul P184_rebus.rbsc). Cu ajutorul mouse-ului se ajustează poziția pictogramei  în pagina manualului și se apasă butonul Save.

Rezolvarea rebusului în pagina manualului se realizează prin dublu click cu mouse-ul pe pictograma aplicației. Ca urmare se afișează fereastra aplicația în care utilizatorul rezolvă rebusul, introducând de la tastatură cuvintele în celulele rebusului. În fig. 10 este reprezentată captura de ecran cu rebusul rezolvat și evaluat. Erorile din rezolvarea rebusului sunt marcate cu culoare roșie.

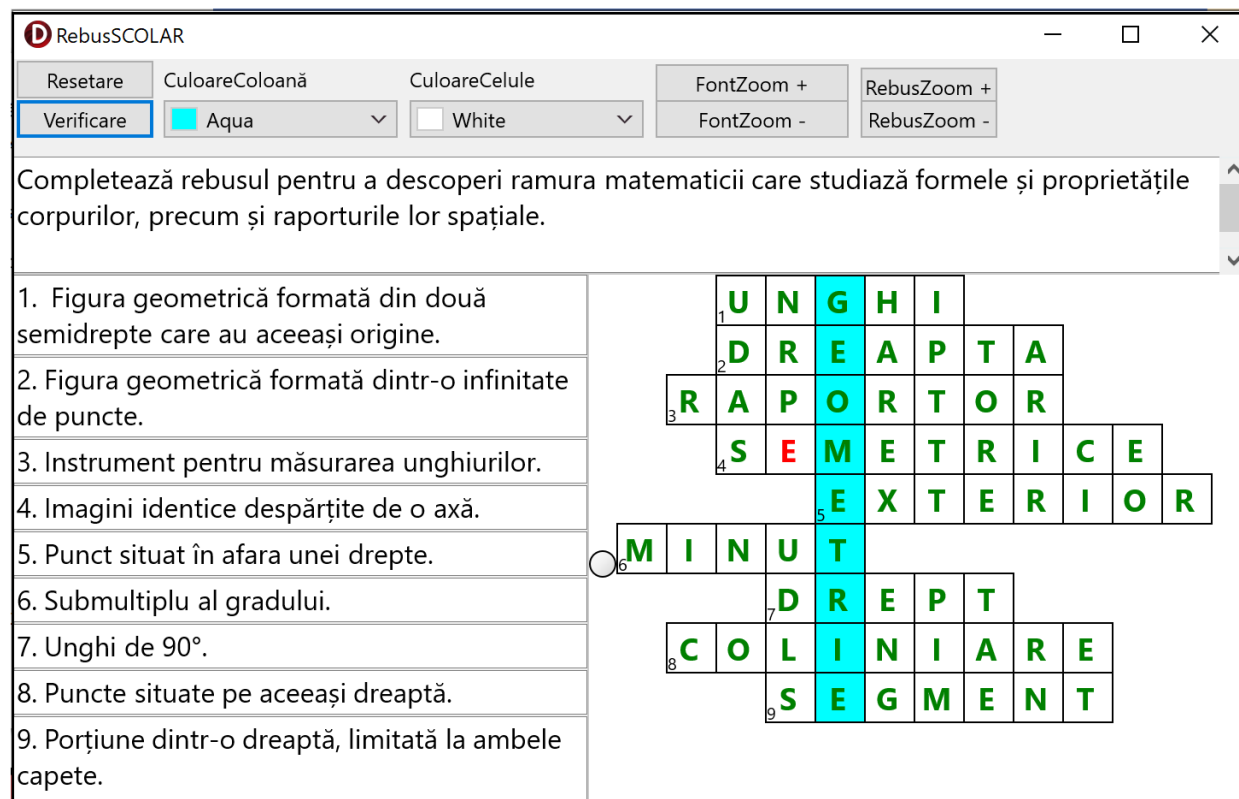


Figura 10. Exemplu de rebus școlar rezolvat în pagina manualului

Rebusurile școlare sunt resurse educaționale frecvent utilizate în activitatea didactică. Pentru crearea lor există diverse instrumente online/offline. MDIR constructor are opțiuni cu ajutorul cărora utilizatorul poate include în paginile manualului orice resursă cu adresă validă WEB. De exemplu, rebusul implementat pe platforma www.didactic.ro cu adresa https://www.didactic.ro/instrumente-interactive/rebus/_operatii-cu-numere-naturale se

include simplu în pagina manualului, accesând meniul și indicând în fereastra de dialog din fig. 11 tipul resursei (Internet link) și adresa validă. După apăsarea butonului AddResurse, în locul selectat din pagina manualului apare pictograma resursei .

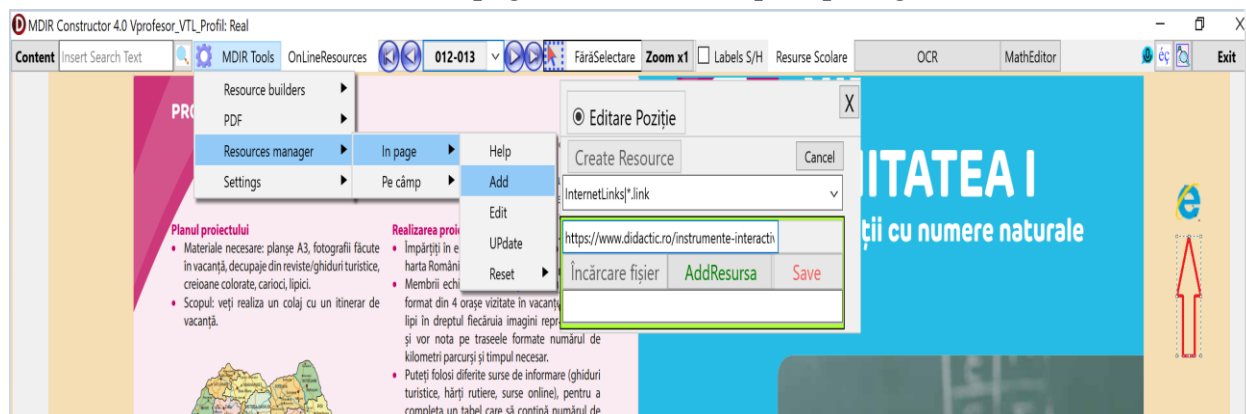


Figura 11. Includerea în paginile manualului a resurselor de tip Internet link

Vizualizarea resursei se realizează prin dublu click cu mouse-ul pe pictograma resurse. În cazul dat se accesează activitatea de rezolvare a rebusului implementat pe site-ul www.didactic.ro. Captura de ecran pentru această activitate este reprezentată în fig.12.

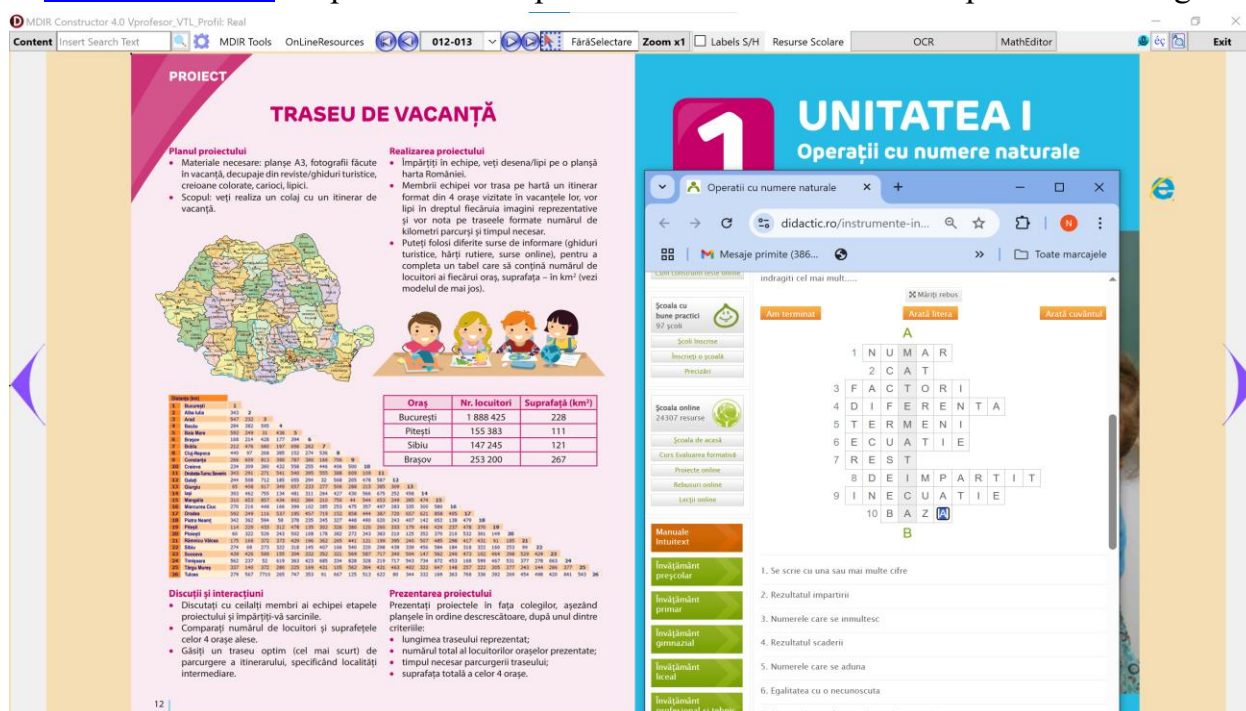


Figura 12. Exemplu de accesare a unei resurse web în pagina manualului

Concluzii

Manualele digitale create cu ajutorul software-lui MDIR Constructor sunt resurse educaționale deschise care se dezvoltă prin colaborarea profesorilor care predau aceeași disciplină școlară, utilizând aceeași versiune a manualului tipărit.

O versiune MDIR Constructor a manualului școlar Matematica clasa V-a, realizată în baza versiunii *.pdf a manualului [2] poate fi descărcată la adresa <https://mdirconstructor.cms.webnode.ro/mdirs/>. Pentru consultații suplimentare, contactați autorul MDIR Constructor nicolae.balmus@gmail.com.

Bibliografie

1. Programa școlară pentru disciplina Matematica (clasele gimnaziale, România). <https://www.ise.ro/wp-content/uploads/2017/01/Matematica.pdf>. [accesat 08.08.2025].
2. VOICULESCU, Dumitru-Ion, DUMITRESCU, Anca-Ileana și al. *Matematică. Manual digital pentru clasa a V-a*. <https://manuale.edu.ro/manuale/Clasa%20a%20V-a/Matematica/UEFSQUxFTEEGNDU/> [accesat 08.08.2025]
3. BALMUȘ, Nicolae CHIRIAC, Tatiana. *MDIR Constructor 3.0. Certificat AGEPI de înregistrare a drepturilor de autor și conexe*. <https://db.agepi.md/opere/Details.aspx?id=475478867825621815&nr=475478867825691016> [accesat 08.08.2025]
4. ACHIRI, Ion, BRAICOV, Andrei și al. *Matematică: Manual pentru clasa a 5-a*. Chișinău: Editura Prut Internațional, 2020. ISBN 978-9975-54-513-6.

UDC: 37.02.3:51:794.1

EMBEDDING THE THEME OF CHESS IN TEACHING MATH TO GIFTED MIDDLE AND HIGH SCHOOL STUDENTS

Ivan BORSENCO, researcher

<https://orcid.org/0009-0007-9877-1602>

e-mail: ivan.borsenco@gmail.com

Moldova State University, IMI "V. Andrunachievici"

Abstract. We demonstrate how to create multiple problem sets that utilize the classic 8×8 chessboard. Through examples, we show how a teacher's approach to crafting the sequence of exercises can guide aspiring math students in developing key concepts in mathematics and computer science algorithms.

Keywords: mathematical competence, curricular enrichment, chessboard.

INTEGRAREA TEMEI ȘAHULUI ÎN PREDAREA MATEMATICII ELEVILOR SUPRADOȚĂȚI DE GIMNAZIU ȘI LICEU

Rezumat. Demonstrăm cum se creează seturi multiple de probleme care utilizează tabla de șah clasică de 8×8 . Prin exemple, arătăm cum abordarea unui profesor în elaborarea secvenței de exerciții poate ghida elevii aspiranți la matematică în dezvoltarea conceptelor cheie în algoritmii de matematică și informatică.

Cuvinte cheie: competență matematică, îmbogățire curriculară, tablă de șah.

1. Introduction

Mathematics often feels abstract to young learners, but when introduced through familiar and engaging activities, it becomes both approachable and exciting. For example, games like chess offer a vivid gateway into mathematical thinking, blending logic, strategy, and pattern recognition in a way that feels like play rather than study. By exploring the chessboard, its pieces, and the way they move, students naturally encounter concepts such as coordinates, symmetry, and probability — often without realizing they are engaging with mathematics. In this article, we present two sets of problems designed to develop these ideas and provide teachers with practical tools for classroom use. The tangible, relatable experience of solving such problems helps build a strong foundation for abstract reasoning, making mathematics not merely a school subject but a natural and enjoyable part of everyday life.

2. Non-attacking chess pieces

An effective way to teach mathematics is to embed learning within the exploration of familiar yet non-mathematical contexts. In this way, certain concepts can be absorbed seamlessly by students. We demonstrate this approach using the classic 8×8 chessboard. The instructor may begin by reminding students how each chess piece moves and then assign the following exercises.

Exercise 1. The *rook* is a chess piece that moves horizontally or vertically any number of unoccupied squares. How many rooks can be placed on a chessboard so that no two rooks attack each other?

Solution. We can place eight rooks along the main diagonal (figure 1). We cannot place nine rooks without conflict, since the chessboard has only eight columns. If nine rooks are placed, at least two must share a column, leading to a contradiction.

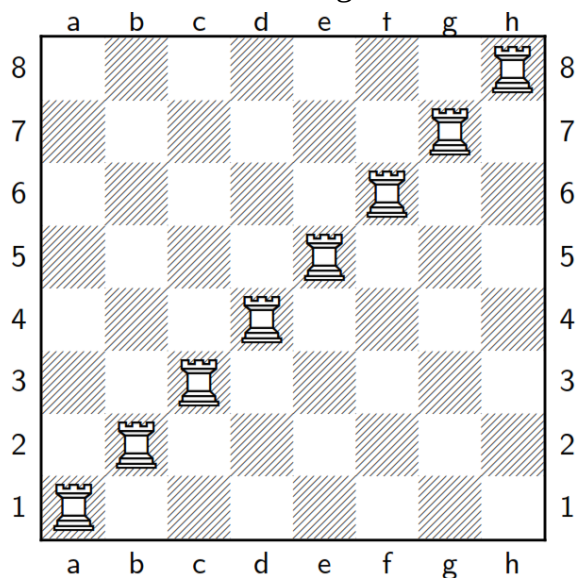


Figure 1. Eight Non-Attacking Rooks

This simple problem provides several discussion points. Each rook placed “occupies” one row and one column. Students must recognize that the problem has two parts: constructing a maximal configuration and proving that larger configurations are impossible.

A natural extension is to ask how many such placements are possible. The answer is $8! = 40,320$, since the first rook can be placed in 8 ways, the second in 7, and so on.

Exercise 2. The *bishop* moves diagonally any number of unoccupied squares. Each bishop remains on squares of the same color throughout the game. What is the maximum number of bishops that can be placed on a chessboard so that no two attack each other?

Solution. Since bishops move diagonally, the geometry of the problem now involves “occupying” diagonals. There are 15 diagonals parallel to the main diagonal. Each can hold at most one bishop. However, the first and last diagonals each consist of only one square and these two squares cannot both be used simultaneously. Thus, at most 14 bishops can be placed without conflict (figure 2).

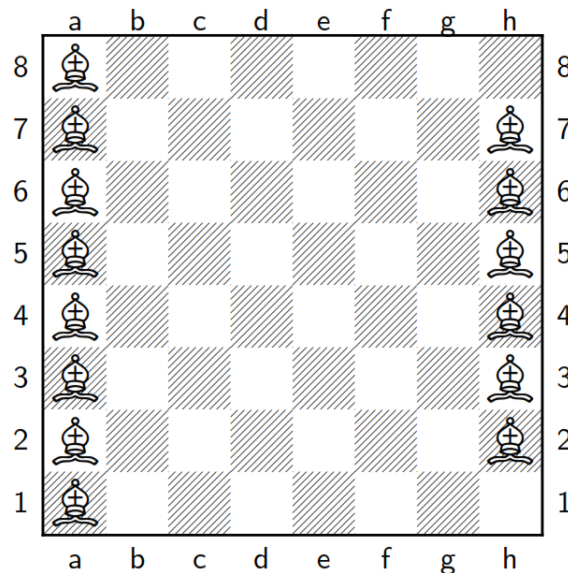


Figure 2. Fourteen Non-Attacking Bishops

Exercise 3. The *queen* can move any number of unoccupied squares horizontally, vertically, or diagonally. Show that eight queens can be placed on the chessboard so that no two attack each other.

Solution. Placing eight queens is more challenging than placing eight rooks, since a queen controls more squares. It is not obvious at first that a solution exists, but there are in fact 92 distinct solutions.

To guide students, teachers can introduce the backtracking algorithm from computer science. This algorithm incrementally builds a candidate solution and abandons (“backtracks”) as soon as a contradiction arises.

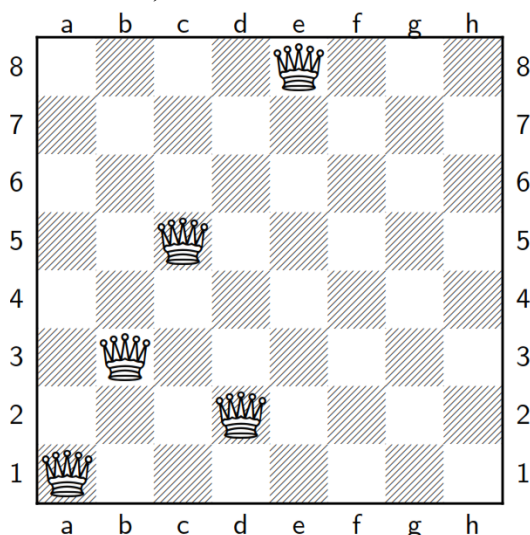


Figure 3. Backtracking Algorithm

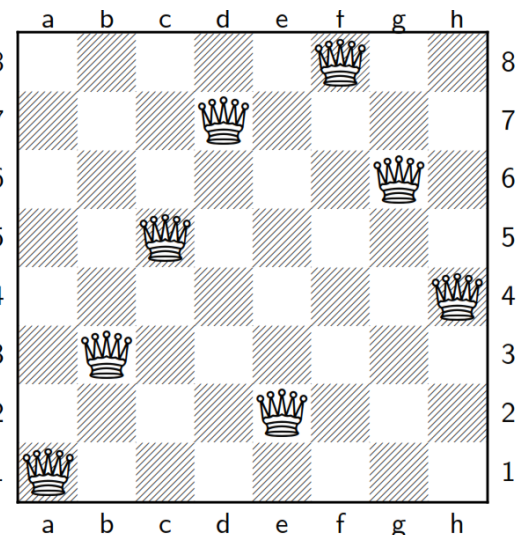


Figure 4. Eight Non-Attacking Queens

For example, one attempt begins with the placements $Qa1$, $Qb3$, $Qc5$, $Qd2$, $Qe8$. At this stage, no queen can be placed in column f , so the algorithm backtracks to column e .

Since no alternative exists there, it backtracks further to column d , continuing with $Qd7$ instead. By repeating this procedure, students can eventually arrive at a complete non-attacking placement. Problems involving non-attacking chess pieces require only minimal familiarity with chess. The reasoning arises from the geometry of the pieces' moves rather than game strategy. While teachers may increase the difficulty in many ways, effective learning begins with relatively simple questions that students can successfully answer. By posing well-chosen follow-up questions and fostering discussion, teachers can keep the class interactive, engaging, and thought-provoking.

3. Knight's journey

Another instructive theme begins with the question: *How can we measure the distance between two squares on a chessboard?*

Intuitively, this leads to the concept of the *Manhattan distance* (or *taxicab distance*). It represents the distance a taxi would travel in a grid-like street network, moving only along rows and columns. It is defined as the minimum number of streets and avenues a taxi would need to traverse from the starting location to the final destination.

Exercise 4. The *knight* moves in an “L” shape: two squares in one direction and then one square perpendicularly. It can also jump over other pieces.

- (a) What is the taxicab distance between two opposite corners of a chessboard?
- (b) What taxicab distance does a knight travel in one move?
- (c) The *king* is a chess piece that moves one square in any direction. What taxicab distance can a king travel in one move?

Solution. The answers to the questions are (a) 14; (b) 3; (c) 1 or 2 (depending on whether the king moves diagonally). These simple questions help students internalize the concept. Additional practice can involve computing distances between randomly chosen squares.

Exercise 5. What is the smallest number of moves a knight needs to travel from one corner of the chessboard to the opposite corner?

Solution. Empirical exploration shows that 6 moves suffice. To prove minimality, note that each knight move changes the color of the square. Since both starting and ending corners (say $A1$ and $H8$) are black, the path must consist of an even number of moves. Furthermore, the taxicab distance between opposite corners is 14. Each knight move reduces this distance by at most 3. Thus, at least 5 moves are needed. But 5 moves end on a white square, so the minimum is 6.

Exercise 6. In how many distinct ways can a knight travel from the bottom-left corner ($A1$) to the top-right corner ($H8$) in exactly 6 moves?

Solution. Students can approach this problem using the breadth-first search (BFS) algorithm, which explores all possibilities level by level. From *A1*, the knight can move to *B3* or *C2*. In two moves, the knight can reach *A5*, *B4*, *C5*, *D4*, *D2*, *E3*, and *E1* (cell *D4* can be reached in two ways).

After three moves, the knight occupies the cells highlighted in red in the figure on the right (figure 5). At this stage, the instructor should illustrate the process, with the red numbers indicating the number of distinct paths leading to each cell.

Once we have made three moves, we can slow down and shift the students' focus to how the knight can reach the final destination. If the goal is to arrive at *H8* in six moves, we first ask: where can the knight be after five moves? The answer is limited to the squares *F7* and *G6*. Next, we ask: where could the knight be after four moves? These are the cells marked with blue question marks in the figure 6 on the left.

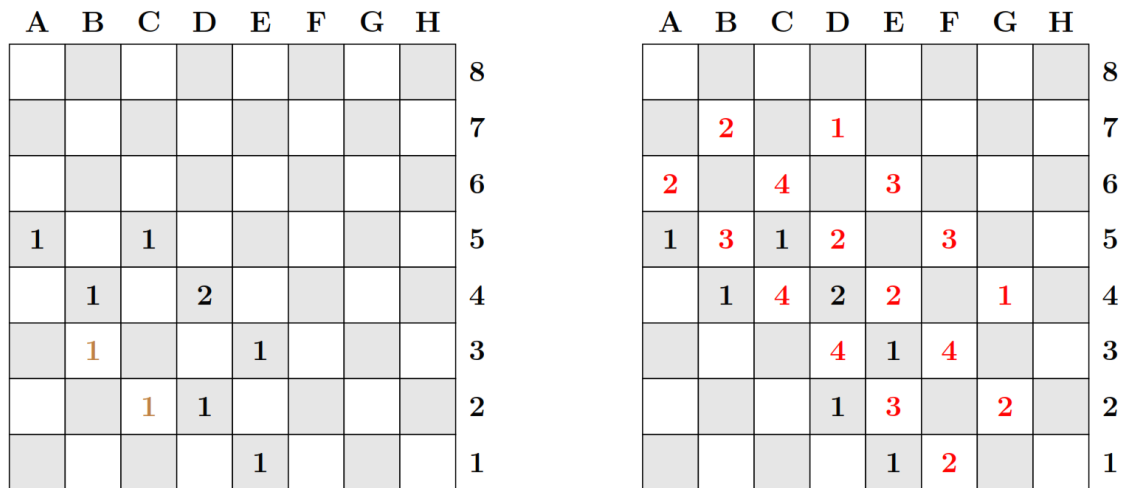


Figure 5

The purpose of posing these questions is to help students realize that they do not need to carry out all the heavy computations for the next step. Instead, they only need to determine how many paths lead from the red-numbered cells to the blue-marked cells. The resulting counts are shown in the figure 6 on the right.

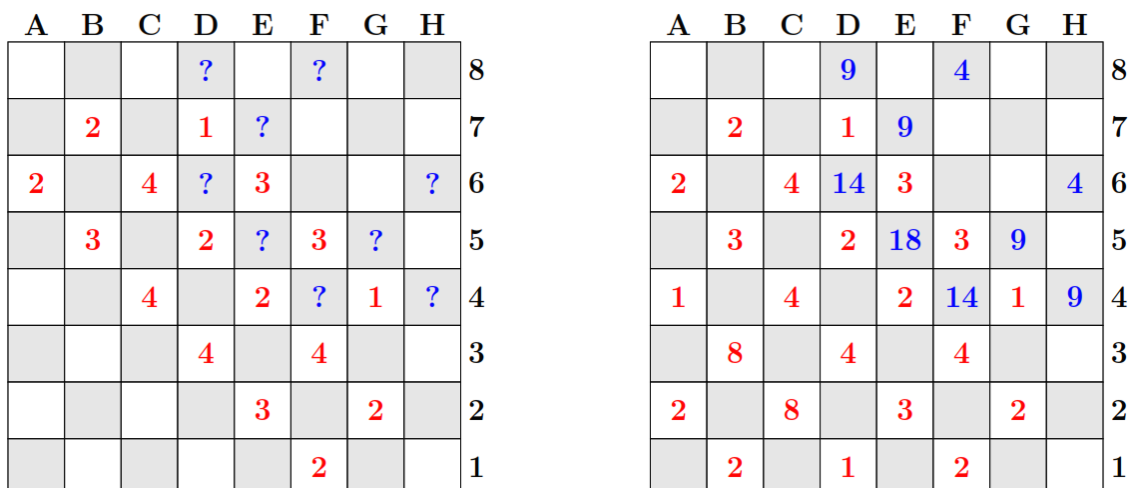


Figure 6

From this reasoning, students can compute that there are 54 ways to reach $F7$ and 54 ways to reach $G6$ in five moves. Therefore, the total number of ways for a knight to travel from the bottom-left corner to the top-right corner in six moves is 108.

4. Conclusion

The two themes presented in this article illustrate carefully designed pedagogical sequences of problems and questions that actively engage students in the learning of advanced mathematical concepts for middle-school and high-school students. Adequate teacher preparation for such classes constitutes a key factor in fostering the development of mathematically gifted students.

***Acknowledgments.** This article was written with the support of project 25.80012.0807.69SE Development of teaching resources aimed at increasing the performance of middle school students in the subject of Mathematics.*

References

1. LOZANSKY, E., ROUSSEAU, C. *Winning Solutions*. Springer, 1996. p. 194.
2. DJUKIC, D., JANKOVIC, V., MATIC, I., PETROVIC, N. *The IMO Compendium*. Springer, 2011.

UDC: 37.02:004.9:51

MANUALE DIGITALE DE MATEMATICĂ: ÎNTRE POTENȚIALUL PEDAGOGIC ȘI PROVOCĂRI DE IMPLEMENTARE

Andrei BRAICOV, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0001-6416-2357>

e-mail: braicov.andrei@upsc.md

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău, Republica Moldova

Rezumat. În ultimul deceniu, manualele digitale de matematică au cunoscut o extindere semnificativă, generată de progresul tehnologic și de nevoia adaptării educației la era digitală. Studiul sintetizează 30 de cercetări publicate între 2014–2024 privind utilizarea resurselor digitale la nivel primar, gimnazial și liceal, analizate pe șase dimensiuni: performanța elevilor, rolul profesorului, infrastructura, calitatea conținutului, incluziunea și sustenabilitatea. Rezultatele arată că manualele digitale pot îmbunătăți implicarea și învățarea personalizată, cu condiția existenței infrastructurii și formării cadrelor didactice, oferind orientări pentru factorii de decizie, proiectanții de curriculum și cercetătorii interesați de digitalizarea predării matematicii.

Cuvinte-cheie: manuale digitale, matematică, potențial pedagogic.

DIGITAL TEXTBOOKS FOR MATHEMATICS: BETWEEN PEDAGOGICAL POTENTIAL AND IMPLEMENTATION CHALLENGES

Abstract. Over the past decade, digital mathematics textbooks have experienced a significant expansion, driven by technological progress and the need to adapt education to the digital age. The study synthesizes 30 research studies published between 2014–2024 on the use of digital resources at primary, secondary and high school levels, analyzed on six dimensions: student performance, teacher role, infrastructure, content quality, inclusion and sustainability. The results show that digital textbooks can improve engagement and personalized learning, provided that the infrastructure and teacher training exist, providing guidance for policymakers, curriculum designers and researchers interested in the digitalization of mathematics teaching.

Keywords: digital textbooks, mathematics, pedagogical potential.

Introducere

Digitalizarea procesului educațional reprezintă una dintre cele mai importante transformări din ultimele decenii, influențând profund modul în care elevii învață și profesorii predau. În particular, manualele digitale au câștigat un rol central ca instrumente didactice, oferind posibilități extinse de interactivitate, multimedia și personalizare a învățării. În contextul predării matematicii, disciplină cu cerințe specifice legate de înțelegerea conceptelor abstracte și dezvoltarea gândirii logice, utilizarea manualelor digitale poate aduce beneficii semnificative în ceea ce privește motivarea elevilor și îmbunătățirea performanțelor școlare.

Cu toate acestea, integrarea tehnologiilor digitale în educație ridică și numeroase provocări. Acestea includ asigurarea accesului echitabil la resurse tehnologice, pregătirea adecvată a cadrelor didactice pentru utilizarea eficientă a noilor instrumente și adaptarea conținutului educațional pentru a valorifica la maximum potențialul multimedia și

interactiv. De asemenea, există preocupări legate de sustenabilitatea utilizării manualelor digitale, necesitatea actualizărilor periodice și rolul central al profesorului în procesul de mediere a informației digitale către elevi.

În acest context, cercetarea și analiza critică a literaturii de specialitate devin indispensabile pentru înțelegerea impactului real al manualelor digitale asupra procesului de învățare a matematicii și pentru formularea unor recomandări care să sprijine o implementare eficientă și echitabilă. Astfel, prezentul articol își propune să sintetizeze principalele rezultate și concluzii ale celor mai relevante studii publicate în ultimul deceniu, oferind o imagine de ansamblu asupra consensurilor, divergențelor și direcțiilor viitoare în domeniu.

Obiectivul principal al acestui studiu este de a identifica factorii care influențează succesul utilizării manualelor digitale în matematică, de a evalua impactul acestora asupra motivației și performanței elevilor și de a evidenția rolul profesorului și al infrastructurii educaționale în procesul de integrare a acestor resurse

Metodologie

Această cercetare a fost realizată printr-o analiză sistematică și sintetică a literaturii de specialitate privind manualele digitale utilizate în predarea matematicii, publicate în perioada 2014–2024. Scopul metodologic a fost identificarea și sintetizarea principalelor tendințe, consensuri și divergente în cercetările recente, cu accent pe impactul manualelor digitale asupra procesului educațional.

Criterii de selecție a studiilor. Au fost incluse studii științifice originale și articole de sinteză care îndeplinesc următoarele criterii:

- ✓ Abordează manualele digitale sau suporturile digitale didactice utilizate în predarea matematicii la nivel gimnazial și liceal;
- ✓ Sunt publicate în perioada 2014–2024, pentru a reflecta evoluțiile recente ale tehnologiei și practicilor educaționale;
- ✓ Sunt disponibile în limba engleză sau română;
- ✓ Prezintă date empirice, studii de caz, revizuri sistematice sau analize teoretice relevante.

Surse și baze de date. Cercetarea bibliografică a fost realizată prin consultarea principalelor baze de date științifice internaționale, precum Web of Science, Scopus, ERIC și Google Scholar. Termenii de căutare au inclus combinații ale expresiilor: „digital textbooks”, „mathematics education”, „interactive learning materials”, „digital learning resources”, „mathematics digital support”, „e-textbooks in math” și altele similare.

Procedura de selecție și analiză. Inițial, au fost identificate peste 120 de publicații, din care, după aplicarea criteriilor de eligibilitate și eliminarea duplicatelor, s-a ajuns la un set final de 30 de studii relevante. Acestea au fost analizate tematic pentru a identifica

aspectele comune și diferențele privind impactul manualelor digitale, factorii care condiționează succesul implementării, rolul actorilor educaționali și provocările existente.

Rezultatele analizei au fost organizate într-o matrice de consens și divergențe, care a stat la baza interpretărilor și discuțiilor prezentate în articol.

Rezultate

Analiza celor 30 de studii selectate evidențiază mai multe tendințe și aspecte cheie privind utilizarea manualelor digitale în predarea matematicii, care pot fi grupate în următoarele categorii principale: impactul asupra performanței și motivației elevilor, rolul profesorului, infrastructura și accesul la tehnologie, calitatea și designul conținutului digital, incluziunea și învățarea colaborativă, precum și durabilitatea și actualizarea resurselor digitale.

Pentru o înțelegere clară a consensurilor și divergențelor existente în literatură, prezentăm următoarea matrice care sintetizează acordurile majore și punctele de controversă în cadrul studiilor analizate:

Tema	Consens majoritar	Divergențe / Contradicții	Repere bibliografice (ex.)
<i>1. Impact asupra performanței și motivației elevilor</i>	Majoritatea studiilor indică că manualele digitale pot îmbunătăți performanța și motivația elevilor prin interactivitate, feedback instant și vizualizări dinamice.	Unele studii semnalează că efectele depind de contextul național, pregătirea profesorului și nivelul de alfabetizare digitală; în unele cazuri, nu există diferențe semnificative față de manualele tipărite.	Wijaya & Singh (2022); Bmic & Greefrath (2020); Wijaya et al. (2025); Alshehri (2024); Tommy Tanu Wijaya et al. (2024)
<i>2. Rolul profesorului</i>	Profesorul rămâne central: manualele digitale nu înlocuiesc pedagogia, ci oferă instrumente pentru planificare, personalizare și monitorizarea progresului.	Divergențe apar în gradul de implicare: unele studii arată că profesorii sunt reticenți sau subutilizează funcționalitățile digitale; alte studii subliniază adoptarea pozitivă.	Johansson et al. (2024); Thomas & Edson (2019); Pepin et al. (2017); Utterberg Modén (2021); Fan et al. (2024)
<i>3. Infrastructură și acces</i>	Accesul la dispozitive și internet este esențial; infrastructura adecvată facilitează integrarea manualelor digitale.	Există inegalități între școli și țări: unele contexte au infrastructură limitată, ceea ce reduce impactul.	Wijaya et al. (2022); Chiriac (2023); Bmic et al. (2024)
<i>4. Calitatea și designul conținutului digital</i>	Conținutul trebuie să fie interactiv, adaptabil și bine structurat, cu suport vizual și instrumente de feedback.	Divergențe privind standardele: lipsa de uniformitate între manuale digitale, iar unele materiale sunt mai degrabă transpuneri digitale ale celor tipărite.	Fan et al. (2024); Lindenbauer et al. (2024); Bmic & Greefrath (2020); Glasnović Gracin & Krišto (2022)
<i>5. Incluziune și învățare colaborativă</i>	Manualele digitale facilitează colaborarea și accesul elevilor cu nevoi speciale; includ elemente	Nu toate manualele digitale au suport pentru incluziune; eficiența depinde de pregătirea	Lindenbauer et al. (2024); Wijaya et al. (2025); Utterberg Modén (2021);

	interactive care permit învățarea personalizată.	profesorului și integrarea metodologică.	Johansson et al. (2024)
6. <i>Durabilitate și actualizare</i>	Manualele digitale permit actualizare rapidă și includ resurse suplimentare; contribuie la sustenabilitate prin reducerea tipăririi.	Unele manuale digitale nu sunt actualizate regulat; probleme de compatibilitate tehnologică pot reduce durata de viață.	Wijaya & Singh (2022); Ebner et al. (2016); Lytvynova (2020); Pepin et al. (2024)

1. *Impact asupra performanței și motivației elevilor*

Manualele digitale au un impact semnificativ asupra performanței și motivației elevilor, oferind interactivitate, feedback instant și posibilități de personalizare a învățării. Studiile arată că elevii folosesc mai activ conceptele matematice atunci când manualele digitale includ elemente vizuale și exerciții adaptative (Wijaya & Singh, 2022; Brnic & Greefrath, 2020). Motivația este adesea crescută datorită gamificării și a interacțiunii dinamice, care fac învățarea mai atractivă și mai captivantă. Totuși, efectele depind de nivelul de alfabetizare digitală al elevilor și de contextul școlar; în anumite cazuri, nu se constată diferențe semnificative față de manualele tipărite (Wijaya et al., 2025).

Cercetările subliniază că rezultatele optime apar atunci când manualele digitale sunt integrate coerent în curriculum și susținute de intervenția pedagogică adecvată.

Studiile evidențiază un impact pozitiv moderat asupra performanței elevilor prin utilizarea manualelor digitale. De exemplu:

- ✓ Wijaya & Singh (2022) au raportat că 64% dintre elevii care au folosit e-books au prezentat o creștere semnificativă a performanței la matematică comparativ cu 42% dintre elevii care au folosit manuale tradiționale.
- ✓ Weigand, Trgalova & Tabach (2024) au arătat că 71% dintre elevii implicați în activități cu manuale digitale au declarat o motivație crescută pentru a rezolva probleme matematice.

Unele studii arată că efectul asupra performanței depinde de integrarea pedagogică: în lipsa ghidării profesorului, impactul scade semnificativ (Brnic & Greefrath, 2020: 38% elevi cu îmbunătățire reală).

2. *Rolul profesorului*

Profesorul rămâne factorul cheie în utilizarea eficientă a manualelor digitale. Profesorii adaptează lecțiile în funcție de nevoile elevilor, pot monitoriza progresul și personaliza activitățile de învățare (Thomas & Edson, 2019). Johansson et al. (2024) subliniază că implicarea activă a profesorului în alegerea și adaptarea manualelor digitale determină gradul de succes al implementării. Exemple concrete includ folosirea manualelor digitale pentru activități de grup, jocuri educative și simulări matematice, care nu ar fi posibile cu manualele tipărite tradiționale. Totuși, unele studii arată că unii

profesori utilizează doar o parte din funcționalitățile digitale, ceea ce limitează impactul acestora (Pepin et al., 2017).

Profesorii acționează ca mediatori critici în eficiența manualelor digitale.

- ✓ Tommy Tanu Wijaya, Cao & Li (2024) au constatat că profesorii care au urmat instruire specifică pentru utilizarea manualelor digitale au folosit 85% din funcționalitățile acestora, comparativ cu 42% în cazul celor fără instruire.
- ✓ Johansson et al. (2024) au observat că 66% dintre profesori integrează activități interactive din manualele digitale în lecțiile lor.

Pe de altă parte, unele cadre didactice folosesc manualele doar ca suport pasiv, limitând impactul digitalizării asupra învățării (Fan et al., 2024: 23% utilizare activă a instrumentelor digitale).

3. *Infrastructură și acces*

Accesul la tehnologie este esențial pentru eficiența manualelor digitale. În școlile cu resurse limitate, impactul poate fi redus din cauza lipsei dispozitivelor compatibile, a conexiunii la internet sau a suportului tehnic (Chiriac, 2023). Wijaya et al. (2022) au observat că în școlile indoneziene cu infrastructură completă, elevii au avut rezultate mai bune și un nivel mai ridicat de interacțiune cu manualele digitale. Exemple de infrastructură necesară includ tablete cu ecrane tactile, software de tip EPUB3 sau aplicații web integrate în manuale, precum cele utilizate în proiectele KomNetMath (Brnic & Greefrath, 2020).

4. *Calitatea și designul conținutului digital*

Manualele digitale eficiente sunt interactive, vizuale și bine structurate. Fan et al. (2024) arată că designul conținutului, adaptativitatea și instrumentele de feedback sunt factori determinanți pentru performanța elevilor. Exemplu concret: manualele digitale KomNetMath permit elevilor să manipuleze obiecte geometrice virtuale și să vizualizeze rezultate instant, facilitând înțelegerea conceptelor abstracte (Brnic & Greefrath, 2020). Divergențele apar în calitatea materialelor: unele manuale sunt doar transpuneri digitale ale manualelor tipărite, fără funcționalități interactive, limitând impactul educațional (Glasnović Gracin & Krišto, 2022).

Manualele digitale care integrează vizualizări interactive și feedback în timp real cresc eficiența învățării:

- ✓ Brnic & Greefrath (2020): 68% dintre elevi au raportat că înțelegerea conceptelor de geometrie a fost mai ușoară cu vizualizări interactive.
- ✓ Glasnović Gracin & Krišto (2022): 72% dintre elevi preferă manualele digitale cu animații și exerciții integrate comparativ cu 28% pentru manuale statice.

S-a observat că unele manuale digitale sunt prea complexe sau supraîncărcate vizual, ceea ce poate reduce performanța (Rezat, 2025: 19% elevi au raportat confuzie).

5. Incluziune și învățare colaborativă

Manualele digitale facilitează incluziunea și învățarea colaborativă, oferind suport pentru elevii cu nevoi speciale și activități de grup interactive. Lindenbauer et al. (2024) au raportat că proiectele naționale de dezvoltare a manualelor digitale în Germania au inclus activități în care elevii lucrau în echipe, comparând rezultate și strategii de rezolvare a problemelor. Wijaya et al. (2025) au arătat că manualele digitale permit elevilor să lucreze în propriul ritm, sprijinind atât incluziunea, cât și autonomia. Totuși, succesul depinde de implicarea profesorului și de integrarea pedagogică adecvată (Utterberg Modén, 2021).

Pepin et al. (2017) a semnalat că 61% dintre elevii cu nevoi speciale au participat mai activ la lecțiile de matematică folosind suport digital, iar Utterberg et al. (2017) a atras atenția că 58% dintre elevi au colaborat mai mult cu colegii lor datorită activităților interactive din manuale digitale. Nivelul de incluziune depinde de adaptarea conținutului la nevoi specifice; manualele standard nu susțin întotdeauna elevii cu dificultăți severe (Kohanová et al., 2025: doar 34% incluziune completă).

6. Durabilitatea și actualizarea manualelor digitale

Manualele digitale oferă avantajul actualizării rapide și al durabilității, reducând necesitatea tipăririi și permițând integrarea de resurse multimedia suplimentare. Pepin et al. (2024) subliniază că resursele digitale permit adaptarea la standardele curriculumului și includerea de exerciții noi fără costuri suplimentare semnificative. De exemplu, manualele EPUB3 permit includerea de animații și teste interactive care pot fi actualizate lunar (Ebner et al., 2016; Lytvynova, 2020). Limitările apar în lipsa unor procese regulate de revizuire sau problemele de compatibilitate tehnologică, care pot diminua durata de viață a manualelor digitale.

Manualele digitale permit actualizarea rapidă a conținutului. Chiriac (2023) raportează că 83% dintre manualele digitale au fost revizuite anual pentru corecturi sau adăugarea de conținut nou. Singh et al. (2023) notează că manualele digitale permit integrarea resurselor web în timp real, ceea ce crește relevanța conținutului pentru 77% dintre lecții.

Actualizarea frecventă necesită resurse și instruire, iar manualele digitale fără suport tehnic pot deveni rapid depășite (Bouche, 2010).

Discuții

Analiza celor 30 de studii arată că manualele digitale în predarea matematicii aduc beneficii semnificative în ceea ce privește implicarea și performanța elevilor, însă impactul acestora nu este uniform și depinde de multiple condiții contextuale. Majoritatea cercetărilor indică faptul că interactivitatea, feedback-ul instant și vizualizările dinamice sporesc motivația elevilor și facilitează înțelegerea conceptelor abstracte. De exemplu,

Wijaya & Singh (2022) au raportat că 64% dintre elevii care au utilizat manuale digitale au înregistrat o creștere semnificativă a performanței comparativ cu 42% dintre cei care au folosit manuale tradiționale, iar Weigand, Trgalova & Tabach (2024) au observat că 71% dintre elevi au declarat o motivație crescută pentru rezolvarea problemelor matematice. Aceste date confirmă consensul general privind potențialul manualelor digitale de a stimula învățarea activă și implicarea elevilor.

Totuși, există divergențe importante. În unele contexte naționale sau instituționale, impactul asupra performanței este mai redus, mai ales atunci când profesorii nu sunt instruiți sau nu utilizează integral funcționalitățile digitale. Brnic & Greefrath (2020) raportează că doar 38% dintre elevi au prezentat îmbunătățiri reale fără o mediere pedagogică adecvată. Această observație subliniază rolul central al profesorului ca mediator: succesul integrării manualelor digitale depinde de capacitatea cadrelor didactice de a adapta și valorifica resursele digitale în contextul lecțiilor. Studiile indică că profesorii care au urmat instruire specifică folosesc 85% din funcționalitățile manualelor digitale, comparativ cu doar 42% în cazul celor fără instruire (Tommy Tanu Wijaya, Cao & Li, 2024). În același timp, Johansson et al. (2024) au observat că 66% dintre profesori integrează activități interactive în lecții, dar Fan et al. (2024) notează că doar 23% utilizează activ instrumentele digitale disponibile. Aceste diferențe evidențiază nevoia de programe sistematice de formare a profesorilor pentru maximizarea beneficiilor manualelor digitale.

Accesul la infrastructură și resurse digitale constituie un alt factor critic. Chiriac (2023) subliniază că lipsa dispozitivelor compatibile, a conexiunii la internet sau a suportului tehnic poate limita semnificativ eficiența manualelor digitale. În școlile dotate corespunzător, elevii au raportat niveluri mai mari de interacțiune și performanță (Wijaya et al., 2022). Aceasta relevă o provocare majoră legată de echitatea digitală: beneficiile manualelor digitale nu sunt distribuite uniform, iar inegalitățile infrastructurale pot accentua decalajele educaționale existente.

Calitatea și designul manualelor digitale reprezintă, de asemenea, un aspect esențial. Conținutul interactiv, structurat logic, cu suport vizual și instrumente de feedback în timp real, contribuie la o învățare mai eficientă. Brnic & Greefrath (2020) au constatat că 68% dintre elevi au înțeles mai bine conceptele de geometrie prin vizualizări interactive, iar Glasnović Gracin & Krišto (2022) arată că 72% dintre elevi preferă manualele digitale cu animații și exerciții integrate comparativ cu 28% pentru manuale statice. Cu toate acestea, unele materiale digitale reprezintă doar transpuneri ale manualelor tipărite, fără funcționalități interactive, ceea ce limitează impactul educațional. Mai mult, supraîncărcarea vizuală sau complexitatea excesivă poate genera confuzie: Rezat (2025) notează că 19% dintre elevi au raportat dificultăți în urmărirea conținutului digital.

Incluziunea și învățarea colaborativă reprezintă dimensiuni importante ale manualelor digitale. Studiile indică faptul că acestea facilitează participarea elevilor cu nevoi speciale și permit activități de grup interactive, sporind autonomia și cooperarea. Pepin et al. (2017) raportează că 61% dintre elevii cu nevoi speciale au participat mai activ la lecțiile de matematică folosind suport digital, iar Utterberg et al. (2017) evidențiază că 58% dintre elevi au colaborat mai mult datorită activităților interactive. Totuși, nu toate manualele digitale oferă suport pentru incluziune completă: Kohanová et al. (2025) notează doar 34% incluziune completă în anumite contexte. Aceasta arată că succesul depinde de integrarea pedagogică și adaptarea conținutului la nevoi diverse.

În ceea ce privește durabilitatea și actualizarea, manualele digitale permit o revizuire rapidă și includ resurse multimedia suplimentare, contribuind la sustenabilitate. Chiriac (2023) raportează că 83% dintre manualele digitale au fost revizuite anual, iar Singh et al. (2023) menționează că 77% dintre lecții beneficiază de resurse web integrate în timp real. Totuși, unele manuale nu sunt actualizate regulat sau întâmpină probleme de compatibilitate tehnologică (Bouche, 2010), ceea ce poate reduce durata lor de viață și relevanța conținutului.

În concluzie, literatura de specialitate evidențiază un consens clar privind potențialul manualelor digitale de a îmbunătăți învățarea matematicii, cu impact pozitiv asupra motivației și performanței elevilor. Divergențele apar mai ales în funcție de pregătirea profesorilor, contextul infrastructural, calitatea designului digital și modul de integrare pedagogică. Problemele deschise includ necesitatea asigurării echității digitale, creșterea formării cadrelor didactice și dezvoltarea unor standarde pentru calitatea manualelor digitale, astfel încât acestea să valorifice în mod optim avantajele oferite de tehnologie.

Concluzii

Manualele digitale pentru matematică pot susține semnificativ implicarea elevilor, personalizarea învățării și dezvoltarea gândirii critice prin resurse interactive și feedback instant. Impactul lor depinde de calitatea conținutului digital, infrastructura disponibilă și pregătirea profesorilor, care rămân factori-cheie în eficiența utilizării acestora. Manualele care reproduc pur și simplu conținutul tipărit oferă beneficii limitate, în timp ce resursele interactive facilitează colaborarea, incluziunea și autonomia în învățare. Actualizarea regulată și adaptarea la contextul educațional sunt esențiale pentru durabilitatea și relevanța acestor instrumente. O abordare integrată, care combină investiții în infrastructură, formarea continuă a cadrelor didactice și dezvoltarea de resurse digitale adaptate, maximizează potențialul pedagogic al manualelor digitale. Factorii de decizie și cercetătorii trebuie să includă aceste considerații în planificarea politicilor și proiectelor educaționale viitoare.

Studiul a fost realizat în cadrul proiectului de cercetare „Inovație în proiectarea și valorificarea manualelor digitale interactive de matematică pentru învățământul gimnazial nivel inferior”, cod: 25.80012.0807.42SE

Bibliografie

1. WIJAYA, T. T., SINGH, K. A meta-analysis of the effects of e-books on students' mathematics achievement. In: *Heliyon*, 2022. vol. 8(6), e09432. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e09432>
2. BRNIC, M., GREEFRATH, G., REINHOLD, F. Working with digital textbooks or printed materials: A study with boys and girls on conditional probability. In: *ZDM Mathematics Education*, 2024. vol. 56, pp. 559–572. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01543-x>
3. WEIGAND, HG., TRGALOVA, J., TABACH, M. Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age. In: *ZDM Mathematics Education*, 2024. vol. 56, pp. 525–541. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9>
4. BRNIC, M., GREEFRATH, G. Learning mathematics with a digital textbook and its integrated digital tools: The KomNetMath project. In: *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 14)*, 2020. <https://doi.org/10.17185/duerpublico/70736>
5. JOHANSSON, H., WESTMAN, A.-K., NORBERG, M., ELIASSON, N. Teachers' use of digital textbooks in mathematics and science education. In: *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 2024. vol.12(3), 10. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.12.3.2455>
6. THOMAS, A., EDSON, A. J. A framework for teachers' evaluation of digital instructional materials: Integrating mathematics teaching practices with technology use in K-8 classrooms. In: *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 2019. 19(3). <https://citejournal.org/volume-19/issue-3-19/mathematics/a-framework-for-teachers-evaluation-of-digital-instructional-materials-integrating-mathematics-teaching-practices-with-technology-use-in-k-8-classrooms>
7. WIJAYA, T.T., CAO, Y., XIAO, X. et al. Perspectives of secondary school teachers on the strengths and limitations of digital mathematics textbooks: an exploratory research in China. In: *Humanit Soc Sci Commun*, 2025. vol. 12, 270. <https://doi.org/10.1057/s41599-025-04541-4>
8. SUGIARNI, R., et al. A Bibliometric Review of Mathematics Textbooks Research. In: *Journal of Scientometric Research*, 2024. vol. 13(2), pp. 396–405. <https://doi.org/10.5530/jscires.13.2.31>
9. LINDENBAUER, E., INFANGER, E.-M., LAVICZA, Z. Enhancing mathematics education through collaborative digital material design: Lessons from a national

- project. In: *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2024. vol. 12(2), pp. 276–296. <https://doi.org/10.30935/scimath/14323>
10. ALABDULAZIZ, M. S. COVID-19 and the use of digital technology in mathematics education. In: *Education and Information Technologies*, 2021. vol. 26(6), pp. 7609–7633. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10602-3>
11. ALSHEHRI, S. M. The E-books and Students' Mathematics Performance: A Qualitative Systematic Review. In: *Páginas de Educación*, 2024. vol. 17(2), e3479. <https://doi.org/10.22235/pe.v17i1.13479>
12. CHIRIAC, T. Raport științific final 2020–2023: Elaborarea și implementarea manualelor digitale interactive în învățământul preuniversitar. Agenția Națională pentru Cercetare și Dezvoltare, 2023. https://ancd.gov.md/sites/default/files/document/attachments/Raport_final_2020-2023_Chiriac%20Tatiana.pdf
13. WIJAYA, T. T., et al. Factors Affecting the Use of Digital Mathematics Textbooks in Indonesia. In: *Mathematics*, 2022. vol. 10(11), 1808. <https://doi.org/10.3390/math10111808>
14. WIJAYA, T.T, CAO, Y., LI, X. The Impact of Digital Mathematics Textbooks on Teacher-Student Interaction: Evidence from Behavioral Sequence Analysis. In: *International Journal of Human–Computer Interaction*, 12 Nov 2024. <https://doi.org/10.1080/10447318.2024.2426033>
15. REZAT, S. The quality of digital curriculum resources for mathematics in German educational policy. In: *ZDM Mathematics Education*, 2025. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01708-w>
16. REZAT, S., FAN, L., PEPIN, B. Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. In: *ZDM Mathematics Education*, 2021. vol. 53, pp. 1189–1206. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3f>
17. KOHANOVÁ, I., SLAVÍČKOVÁ, M., ROSA, S. et al. Exploring Teachers' Resource Utilization Practices and Beliefs in Mathematics Education: A Cross-National Study on Reasoning and Proving. In: *Int J of Sci and Math Educ*, 2025. <https://doi.org/10.1007/s10763-025-10577-4>
18. PEPIN, B., CHOPPIN, J., RUTHVEN, K. et al. Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change. In: *ZDM Mathematics Education*, 2017. vol. 49, pp. 645–661. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0879-z>
19. EBNER, M., et al. Potential of EPUB3 for digital textbooks in higher education. *arXiv preprint*, 2016. arXiv:1606.05690. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.05690>
20. LYTVYNOVA, S. H. Electronic textbook as a component of Smart Kids technology of education of elementary school pupils. *arXiv preprint*, 2020. arXiv:2005.07488. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.07488>

21. UTTERBERG, M., TALLVID, M., LUNDIN, J. Digital textbooks in mathematics education: Teachers as active end-users and participants in design solutions. In: *ICERI2017 Proceedings*, 2017. 1281–1284. <https://doi.org/10.21125/iceri.2017.0422>
22. FAN, L., LI, N., ZHU, F., LI, S. On the design and development of digital mathematics textbooks: Findings from a systematic review. În: *Recent Advances in Mathematics Textbook Research and Development*, ICMT 2022. 2024, pp. 227–232. https://doi.org/10.1007/978-981-97-8426-4_30
23. GLASNOVIĆ GRACIN, D., KRIŠTO, A. Differences in the requirements of digital and printed mathematics textbooks: Focus on geometry chapters. In: *Center for Educational Policy Studies Journal*, 2022. vol. 12(2), pp. 95–117. <https://doi.org/10.26529/cepsj.1285>
24. SINCLAIR, N., BACCAGLINI-FRANK, A. Digital technologies in the early primary school classroom. *arXiv preprint*, 2016. arXiv:1602.03361. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1602.03361>
25. SINGH, J., ZOUHAR, V., & SACHAN, M. Enhancing textbooks with visuals from the web for improved learning. In: *arXiv preprint*, 2023. arXiv:2304.08931. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.08931>
26. BOUCHE, T. Digital Mathematics Libraries: The Good, the Bad, the Ugly. In: *Math.Comput.Sci.* 3, 227–241 (2010). <https://doi.org/10.1007/s11786-010-0029-2>
27. BORBA, M. C., et al. Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. In: *ZDM Mathematics Education*, 2016. vol. 48(5), pp. 589–610. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4>
28. THURM, D., BARZEL, B. Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. In: *ZDM Mathematics Education*, 2020. vol. 52, pp. 1411–1422. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01158-6>
29. UTTERBERG MODÉN, M. Teaching with digital mathematics textbooks: Activity-theoretical studies of data-driven technology in classroom practices. Doctoral dissertation, University of Gothenburg, Department of Applied Information Technology, 2021. <https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/69472>
30. PEPIN, B., GUEUDET, G., CHOPPIN, J. Transformation of Mathematics Education Environments by Digital Resources. In: *Pepin, B., Gueudet, G., Choppin, J. (eds) Handbook of Digital Resources in Mathematics Education*. Springer International Handbooks of Education. Springer, Cham, 2024. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_1

UDC: 004.89:629.014.9:512.5

AERIAL ALGEBRA: CONCEPTS, METHODS AND REAL-WORLD APPLICATIONS

Arina BRIGALDA, Master in Educational Sciences

<https://orcid.org/0009-0000-2600-2360>

e-mail: arinabrigalda@gmail.com

Dorin AFANAS, PhD, Associate Professor

<https://orcid.org/0000-0001-7758-943X>

e-mail: afanasdde@gmail.com

"Ion Creangă" State Pedagogical University from Chisinau, Republic of Moldova

Abstract. The article introduces the concept of “aerial algebra”, a theoretical framework for modeling interactions between drones and distributed autonomous networks. The approach relies on algebraic structures (monoids, groups, vector spaces), graph theory, topology and information theory, to describe processes such as communication, coordination and dynamic reconfiguration. Practical applications are presented – autonomous patrolling, drone swarm modeling, route optimization and communication security. The conclusions highlight the potential of aerial algebra to underpin intelligent aerial networks, with applications in industry, defense and STEAM education.

Keywords: aerial algebra, autonomous systems, aerial communication, drone networks, mathematical modeling, STEAM education.

ALGEBRA AERIANĂ: CONCEPTE, METODOLOGII ȘI APLICAȚII ÎN LUMEA REALĂ

Rezumat. Articolul introduce conceptul de „algebră aeriană”, un cadru teoretic pentru modelarea interacțiunilor dintre drone și rețele autonome distribuite. Abordarea se bazează pe structuri algebrice (monoiduri, grupuri, spații vectoriale), teoria grafurilor, topologie și teoria informației, pentru a descrie procese precum comunicarea, coordonarea și reconfigurarea dinamică. Sunt prezentate aplicații practice – patrulare autonomă, modelarea roiurilor de drone, optimizarea traseelor și securizarea comunicațiilor. Concluziile evidențiază potențialul algebrei aeriene de a fundamenta rețele aeriene inteligente, cu aplicații în industrie, apărare și educație STEAM.

Cuvinte-cheie: algebră aeriană, sisteme autonome, comunicație aeriană, rețele de drone, modelare matematică, educație STEAM.

Introduction

The accelerated evolution of autonomous technologies and the miniaturization of hardware components have led, in recent decades, to the proliferation of unmanned aerial systems, known generically as drones or UAVs (Unmanned Aerial Vehicles) [1, 3]. These intelligent entities are becoming increasingly frequently integrated into critical applications such as infrastructure surveillance, smart logistics, interventions in dangerous areas, environmental monitoring and emergency communications. In parallel, the emergence and development of autonomous drone networks, capable of communicating, cooperating and

reorganizing without direct human intervention, opens new perspectives regarding the architecture of distributed systems and the paradigm of aerial communication.

However, the complexity of the behaviors in these networks requires a rethinking of the modeling and analysis tools. Classical approaches [4, 5, 12], based exclusively on deterministic algorithms or empirical simulations, become insufficient in the face of scenarios with high dynamics, variable latencies, fluid topologies and high security requirements. In this context, it becomes necessary to develop a unifying formal framework, capable of expressing not only the individual functioning of a drone, but also the complex interactions and the process of distributed decision-making at the network level.

This paper proposes such an approach, in the form of a theoretical framework called *Aerial Algebra* – an abstract mathematical construct that combines concepts from modern algebra, graph theory, topology, formal logic and information theory, to rigorously describe the autonomous behaviors of distributed aerial systems. Unlike classical analysis methods, aerial algebra introduces a formal language and well-defined operations that allow modeling of processes such as synchronized communication, adaptation to environmental changes, swarming, communication encryption and real-time network reorganization [7, 9].

Furthermore, it is demonstrated that this framework can be applied both in operational contexts (security, rescue, logistics applications) and in innovative educational contexts, through its integration into STEAM pedagogy, offering pupils and students a stimulating environment for the development of transdisciplinary skills in mathematics, computer science, electronics and automation.

This paper aims to theoretically substantiate the notion of aerial algebra, to highlight its applicative potential and to open new research directions in the field of autonomous aerial communications, in a technological landscape in continuous transformation.

1. Theoretical foundations of aerial algebra

The theoretical foundations of aerial algebra are built on a coherent set of conceptual and mathematical components that give this formal framework the robustness necessary for modeling distributed autonomous systems. These components include:

1.1. Conceptual motivation and the need for a formal framework. In the context of new technological paradigms, in which autonomous drone networks operate as interconnected, dynamic and self-adaptive entities, it becomes urgent to define a unifying formal framework that allows both the analysis and the prediction of the behavior of these systems. Aerial algebra responds to this need by building a mathematical structure designed to describe the interactions between aerial agents (drones) and to regulate the communication, decision and reconfiguration operations in distributed networks.

Unlike strictly algorithmic or simulation approaches, algebras offer the advantage of compositionality, that is, the construction of complex behaviors by combining well-defined fundamental operations. This principle is essential in the modeling of autonomous systems, where units (drones) must collaborate coherently according to formal rules.

1.2. Algebraic structure of drone behavior. The proposed model defines each drone as an autonomous agent operating in an operational algebraic space, endowed with a multitude of states S and a set of operations O , having the following characteristics:

- $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ represents the possible states of a drone (for example: initialization, flight, reception, transmission, avoidance, landing).
- $O = \{\oplus, \otimes, \circ, \delta\}$ are binary or unary operations that define behaviors such as: communication, aggregation, path composition, and local reconfiguration.

The structure is formalized as an action monoid, where there is a neutral state s_0 , and the operations are associative:

$$(s_i \oplus s_j) \oplus s_k = s_i \oplus (s_j \oplus s_k), \quad \forall s_i, s_j, s_k \in S.$$

This formalization allows the combination of actions of multiple drones within a swarm, reflecting their cooperation as an algebraic product within a network.

1.3. Representation of aerial communication through graphs [8] and topologies. Drone networks are modeled as dynamic directed graphs $G = (V, E)$, where:

- V is the set of drones (nodes);
- $E \subset V \times V$ is the set of communication links;
- weight functions $w: E \rightarrow R^+$ they may reflect latencies, signal strength, or routing costs.

Communication between drones is modeled by algebraic functions defined on the edges of the graph, with propagation and composition rules: $f_{i,j}(m) = T(m, c_{i,j}, t)$, where m is the message sent, $c_{i,j}$ is the channel, and t the time.

The topology of the flight space is considered as a discretized differentiable manifold, and the drone motion is modeled by continuous composite trajectories, defined algebraically:

$$\gamma_i(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \text{ pentru traectorii polinomiale.}$$

1.4. Concepts from information theory and algebraic encryption. In an autonomous network, data security is essential. Aerial algebra integrates elements of code theory and algebraic cryptography, using hermetic codes defined on finite fields F_q , with operations compatible with the behavioral structure of drones.

Examples include:

- Reed–Solomon codes for error detection and correction in air transmissions.
- Permutations grouped into abelian subgroups for adaptive symmetric encryption.

- Distributed key generators based on algebraic tensor products.

1.5. Logical formalism and decision automation. Each drone is described by a finite state machine (FSM) extended with temporal logic (for example LTL – Linear Temporal Logic), which allows the formulation of the activation conditions of some operations depending on time and context. An example can be:

$$\Box(\text{received}(\text{signal}) \rightarrow \Diamond \text{send}(\text{response})).$$

This formalism allows programming the drone's reactive behavior in a predictable and verifiable framework, including in complex multi-agent collaboration scenarios.

2. Conceptual approaches and operational definitions of Aerial Algebra

The concept of *Aerial Algebra* is emerging at the intersection of applied mathematics [6], autonomous systems science and aerial communications engineering. In order to rigorously substantiate this theoretical framework, a careful analysis of the meanings that the term can take on depending on the application context and the level of abstraction is necessary. This section aims to explore the main conceptual approaches and formulate a series of operational definitions that serve both in the theoretical plane and in the construction of models applicable to distributed drone networks. By delimiting these perspectives, the necessary basis is created for the formalization of interactions, communication processes and decision mechanisms within autonomous aerial systems.

Definition 2.1 (broad sense). *Aerial algebra is an innovative theoretical and operational framework that studies algebraic structures, relations and mathematical operations applicable to the modeling, optimization and control of aerial communications and distributed networks, especially those carried out by drones, stratospheric balloons, autonomous aerial platforms and other unmanned aerial vehicles.*

This field integrates concepts from abstract algebra, category theory, graph theory, and computational topology, with elements from information theory, network theory, and distributed systems control. Aerial algebra provides the formalism necessary for:

- description and composition of dynamic aerial topologies;
- formulation of interoperability relationships between aerial nodes;
- optimization of routes and data flows in three-dimensional space;
- modeling of communication logic between drones or hybrid ground-air networks;
- coordinated control of UAV (unmanned aerial vehicle) fleets in complex contexts (civil, military, scientific, educational).

The epistemological justification is the following: the concept of “algebra” in this formulation does not refer only to classical numerical or symbolic operations, but to an operational abstraction – in the sense of categories and relational structure – in which aerial entities (drones, sensors, receivers, etc.) can be represented as objects in a space of

compatible operations, and the interactions between them can be modeled through compositions, morphisms or transformations.

Therefore, aerial algebra becomes a formalized mathematical language to express and analyze increasingly complex phenomena of modern three-dimensional communications and distributed systems located in airspace.

Definition 2.2 (in the context of drones – specific meaning). *Aerial algebra is an interdisciplinary theoretical field that uses algebraic and relational structures to model, analyze, and optimize the operation of autonomous or semi-autonomous drone networks in three-dimensional airspace.*

This applied branch of mathematics describes how drones interact, communicate, and coordinate with each other, through formal operations that reflect connections, position transformations, data routing, and collaborative processes. In this sense, each drone is treated as an object in an algebraic structure, and the relationships between them are expressed through functions, compositions, or transformations, depending on:

- displacement and position vectors in space (three-dimensional);
- communication and data exchange protocols;
- operational priorities and distributed tasks;
- collision avoidance and path optimization rules.
- Aerial algebra in the context of drones provides a formal framework for:
- collaborative coordination of a drone fleet;
- optimization of aerial communication networks between mobile nodes;
- modeling of distributed decision logic;
- simulation of real-time interactions;
- integration of automated and algorithmic control systems.
- The mathematical dimensions involved are:
- Groups and monoids of spatial transformations (for positions and trajectories);
- Dynamic graphs and graph algebras (for communication connections between drones);
- Boolean algebras and modal logics (for decision making in uncertain environments);
- Categorical structures (for mission composition and interoperability).

Between the two definitions of Aerial Algebra, the differences are both conceptual and scope-specific. Here is a clear comparative analysis:

Characteristics (Definition 2.1):

- Broad scope: refers to all types of unmanned aerial platforms (not just drones), including:
 - drones of various classes;
 - stratospheric balloons;

- stationary platforms;
- other autonomous aerial vehicles.
- Emphasis on distributed communications and networks.
- Includes operational (not just theoretical) components.
- More general language, suitable for a broad framework (e.g. interdisciplinary research proposals, grants, international scientific events).

Characteristics (Definition 2.2):

- Narrow and clearly defined scope: refers exclusively to autonomous or semi-autonomous drones.
- Focuses on the operation and behavior of drone fleets – so the emphasis is on the dynamics of drone networks.
- Terminology is more technical and directed towards aerial robotics.
- Suitable for:
 - dissertations focused on drones;
 - applied research in robotics and AI;
 - specialized educational or engineering contexts.

The key differences are presented in Table 1.

Table 1. The essential difference

Criterion	Definition 2.1 (general)	Definition 2.2 (specific)
Sphere of application	All types of unmanned aerial vehicles	Only autonomous/semi-autonomous drones
Domain of application	Generally distributed aerial communications	Drone networks in three-dimensional space
Level of abstraction	Broader and conceptual, with openness to more areas	More applied, more oriented towards robotics and AI
Target audience	Interdisciplinary (engineers, theorists, communicators)	Technical, robotics, STEAM education, drone practitioners
Recommended use	Large projects, grants, extensive theoretical works	Drone-focused dissertations, case studies

Thus, we can state:

- if we want to define Aerial Algebra as a general theoretical concept, with multiple applicability, then we use Definition 2.1;
- if we focus strictly on drones and their specific applications, then Definition 2.2 is more precise and appropriate.

Definition 2.3 (unified). *Aerial algebra is an interdisciplinary theoretical and applied field that uses algebraic structures and formal mathematical relationships to model, analyze, and optimize the operation of distributed aerial networks, especially those composed of autonomous or semi-autonomous drones, interacting in a three-dimensional space.*

This discipline studies, from an algebraic perspective, the processes of communication, cooperation, decision and operational reconfiguration within intelligent air systems, integrating methods from abstract algebra, graph theory, formal logic and distribution computer science.

Definition 2.3 is suitable both for theoretical introductions in dissertations and for scientific articles or academic presentations.

Definition 2.4 (accessible). *Aerial algebra is a new field that uses ideas from mathematics to understand and organize how drones communicate, collaborate, and accomplish their missions in the air.*

Through mathematical rules and models, this discipline helps coordinate drone fleets – so that they move efficiently, avoid collisions, and work together, whether delivering packages, monitoring farmland, or participating in rescue missions [2].

Aerial algebra combines mathematical thinking with drone technology and contributes to the development of intelligent, safe, and efficient aerial networks.

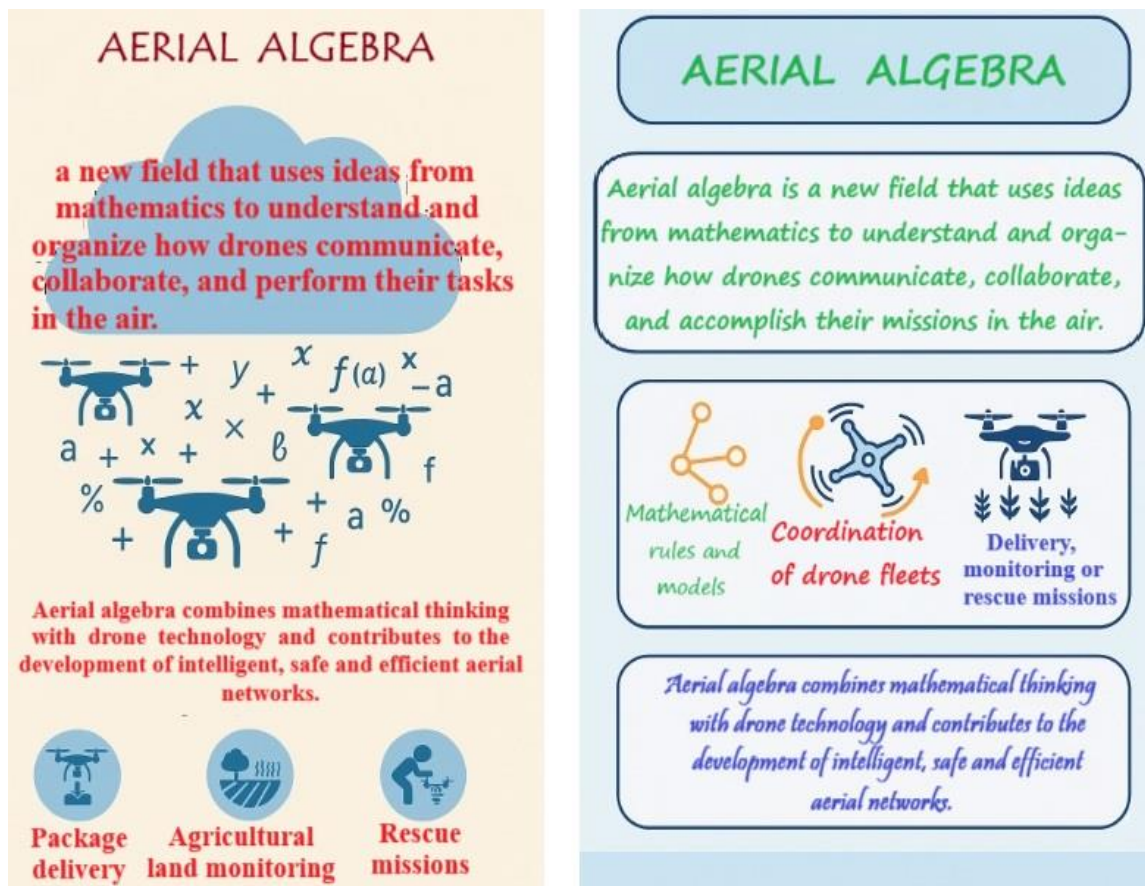


Figure 1. Infographic variants of the concept of Aerial Algebra

This version, i.e. Definition 2.4, can be used in:

- educational presentations (e.g. high schools, STEAM workshops);
- project promotion materials;
- scientific popularization speeches;
- friendly introductions at interdisciplinary conferences.

If we want to present the concept of “Aerial Algebra” in a visual form (infographic), we can use one of the variants illustrated in figure 1.

Definition 2.5 (short in the context of drones). *Aerial algebra is a theoretical framework that uses algebraic structures to model and optimize interactions between autonomous drones in airspace. Through concepts from abstract algebra, graph theory, and distributed logic, it describes the coordination, communication, and movement of drones as entities in a mobile, intelligent, and three-dimensional network.*

Definition 2.5 is an abbreviated version of the definition of "Air Algebra", suitable for introductions, presentations, or summaries.

3. The object of study and research methods of Aerial Algebra (in the context of definition 2.2)

In a technological landscape dominated by autonomous systems and distributed networks, Aerial Algebra is emerging as a new field that aims to formally model collective behaviors and communication between drones. Its object of study includes mathematical structures that describe the interaction, coordination, and adaptation of autonomous aerial entities in dynamic environments [10, 11]. Research in this field is based on interdisciplinary methods, combining algebraic analysis, graph theory, formal logic, cryptography, and computational simulations, with the aim of establishing new paradigms for control and communication in intelligent aerial networks.

Aerial algebra studies algebraic and logical-mathematical models that describe the relationships, operations, and cooperation structures between drones in distributed aerial networks. This includes:

- formal structures of communication and interoperability between drones;
- rules for composing and transforming states within aerial missions;
- logical and process algebras for decision-making in dynamic environments;
- abstract models for organizing, synchronizing, and reconfiguring fleets in intelligent aerial networks.

Aerial algebra, as an innovative field at the intersection of applied mathematics, computer science, drone engineering and communication theory, requires a rigorous and multidimensional methodological apparatus. The research methods used in this discipline reflect both the abstract formal character of algebraic structures and their practical applicability in concrete operational scenarios, such as drone fleet coordination, aerial network optimization and distributed decision modeling.

The following are presented the main categories of methods used in Aerial Algebra research.

♦ **Formal mathematical methods.** The formal method constitutes the theoretical foundation of Aerial Algebra. This means the use of rigorous mathematical structures, such as:

- *Classical and modern algebraic structures* (groups, monoids, rings, process algebras) to describe the composition and transformations between the states of a network of drones;
- *Dynamic graph theory*, applied to represent communication relationships and variable topologies between drones;
- *Boolean algebras and logical algebras*, useful in describing the binary or conditional decisions that drones make in a collaborative context;
- *Category theory*, used to formalize morphisms and compositions between aerial entities, as well as to deal with operational compatibility between missions.

These methods are essential in the axiomatic formulation of the system and in deducing internal logical coherence relations.

♦ **Computational and algorithmic methods.** Research in Aerial Algebra requires the implementation and testing of theoretical models through:

- *Computational simulations* carried out using software environments (Matlab, Python, Simulink, ROS), to test the progressive behaviors of drones in the network;
- *Optimization algorithms* (genetics, swarm intelligence, greedy algorithms, etc.) used to streamline routes, distribute tasks and avoid collisions;
- *Multi-agent modeling*, where drones are treated as autonomous agents, which interact based on algebraic rules of communication and decision;
- *Symbolic computation and automatic algebraic manipulation*, applied in the development of mathematical formalisms and in the verification of system properties.

These methods ensure the transposition of algebraic models into concrete computational applications.

♦ **Experimental and applied methods.** For the practical validation of theoretical models, the following are used:

- *Experimental testing on drone prototypes* (DJI, Parrot, Makeblock, etc.) under controlled conditions (indoor/outdoor);
- *Empirical observation of the behavior of autonomous networks*, in order to identify any discrepancies between the algebraic model and physical reality;
- *Evaluation of the performance of coordination algorithms* in distributed missions;
- *Experimentation assisted by sensors and tracking systems* (GPS, Lidar, IMU), to collect relevant data on the execution and interaction between drones.

The experimental method has the role of validating or adjusting the proposed algebraic structures according to the reality of physical systems.

◆ **Interdisciplinary methods.** Being a frontier field, Aerial Algebra takes over and adapts methods specific to other fields:

- *Network theory* (network science), applied in the analysis of aerial communication connectivity and robustness;
- *Distributed systems control*, for managing the synchronization and stability of the drone network;
- *Artificial intelligence and machine learning*, used for the dynamic adaptation of algebraic rules based on experience or data collected in real time.

These methods complete the researcher's arsenal and allow the integration of Aerial Algebra into intelligent autonomous systems.

4. Applications and case studies

Applications and case studies dedicated to Aerial Algebra highlight the practical potential of this formal framework in modeling and optimizing the behavior of autonomous drones. In this section, concrete scenarios from areas such as aerial patrol, distributed communications, information encryption, and STEAM education are presented, in which algebraic concepts are applied to describe, simulate, or improve the functioning of UAV networks. The emphasis is placed on the practical relevance of the theoretical model, providing a bridge between mathematical formalism and operational realities.

Application 4.1. Agricultural monitoring with a fleet of autonomous drones. A large agricultural company wants to automate the process of monitoring crops, in order to detect early signs of drought, disease, pests or nutrient deficiency. The area is vast, divided into several sectors, and the information must be collected periodically and transmitted in real time to the analysis center.

The solution based on Aerial Algebra. A fleet of autonomous drones is being deployed, collaborating in a coordinated manner to efficiently cover the entire surface.

Algebraic elements involved

I. Algebraic modeling of drone network

- Each drone is treated as an object in an algebraic structure.
- Communication and synchronization relationships are represented by morphisms (in the categorical sense) or edges (in dynamic graphs).
- Grouping of drones into regions is done using algebraic partitions of the airspace.

II. Composition and reorganization rules

- Drones can reorganize their routes based on composition rules (for example: if one fails, another takes over).
- Operation monoids are defined, in which commutativity and associativity of actions allow for real-time recalculations.

III. Logical optimization of communication

- The system implements a logical decision algebra: if an area is completely scanned, the “done” signal is transmitted and the drone automatically moves to the next region.
- The data flow follows an optimized logical network, in which nodes (drones) decide locally but in global harmony.



Possible results

- Fast and accurate collection of NDVI (vegetation index) data.
- Reduction of energy consumption through optimized routing and avoidance of overlapping routes.
- Dynamic adaptation: if one of the drones encounters a problem (wind, malfunction), the others adjust their behavior without human intervention.

In conclusion, we can say that this concrete application convincingly illustrates the meaning of *Aerial Algebra* as a field in which algebraic and relational structures are harnessed to model, analyze and optimize autonomous drone networks in a real, three-dimensional space, while ensuring operational efficiency and distributed intelligence.

Application 4.2. Intelligent patrolling of a sensitive perimeter. An international airport or military base wants to be protected from unauthorized intrusions, especially at night or in areas difficult to access for ground security.

Solution based on Aerial Algebra. An autonomous aerial patrol system is being implemented, composed of multiple drones that communicate and coordinate their routes in real time.

The role of Aerial Algebra:

- *An algebraic patrol structure* is created: each drone has a defined role in a three-dimensional spatial network.
- *Cyclic rotation rules* (group type) are applied so that each area is patrolled periodically, without overlapping.
- If a drone detects an anomaly (thermal, sound, etc.), *a reconfiguration rule* is algebraically activated: other neighboring drones automatically modify their trajectories to isolate the perimeter.

Results:

- Increased detection and response efficiency.
- Intelligent redundancy: the system adapts if one or more drones fail.
- Distributed network response – without rigid centralization.

Application 4.3 (in STEAM education). Interactive math lesson with programmable drones. A Military College (with a real or technological profile) introduces STEAM classes (Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics) and wants to motivate students through applied projects.

Proposed activity: students learn the concepts of *groups*, *permutations*, and *logical networks* using programmable mini-drones that fly around the classroom or college grounds, simulating the behavior of a coordinated aerial system.

The Role of Aerial Algebra:

- Each student/group controls a drone and defines a *motion function* – modeled algebraically.
- Together, students build a *spatial graph of communication* and motion between drones.
- Concepts such as:
 - Commutativity: changing the flight order between two drones.
 - Inverse: returning a drone to its initial position.
 - Identity: the drone stays in place.
 - Boolean-logic networks: activating the light depending on the distance from another drone.

Results:

- Intuitive understanding of algebraic concepts.
- Development of logical and collaborative thinking.
- Real integration between mathematics, programming, physics and creativity.

Case Study 4.1. Autonomous aerial patrol for sensitive perimeters. In strategic areas (e.g. military bases, refineries, airports or borders), real-time perimeter protection is essential. Traditional security systems are expensive, rigid and can be avoided. A fleet of autonomous drones is proposed that patrol the area according to predefined algebraic rules, adaptable in cases of alert or failure.

I. Operational objectives

- Early detection of perimeter violations.
- 24/24 monitoring, including in difficult weather conditions.
- Autonomy and automatic reconfiguration capability.
- Coordination without rigid central control.

II. Applying Aerial Algebra

II.1. Mathematical structure. The fleet is modeled as a crowd $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ of drones. A set of binary operations is defined:

- $\oplus$: Spatial reconfiguration (positions).
- $\otimes$: Time synchronization.
- $\circ$: Composition of trajectories.

These operations form an *algebraic structure* resembling a group or semigroup, depending on the nature of the application.

II.2. Relational networks. Drones communicate with each other through a directed graph network $G(V, E)$, where:

- V they are drone nodes;
- E are communication links (wifi/5G/LoRa).

The graph is dynamic – edges are activated based on proximity and obstacles.

II.3. Distributed logic. Cellular automaton or fuzzy logic rules are used to decide:

- Who takes over patrolling in case of failure;
- How to form rapid intervention subgroups;
- How to avoid collisions (e.g. spatial priority rules).

If we want to present diagrams and visual representations, then we can use one of the variants illustrated in figure 2.

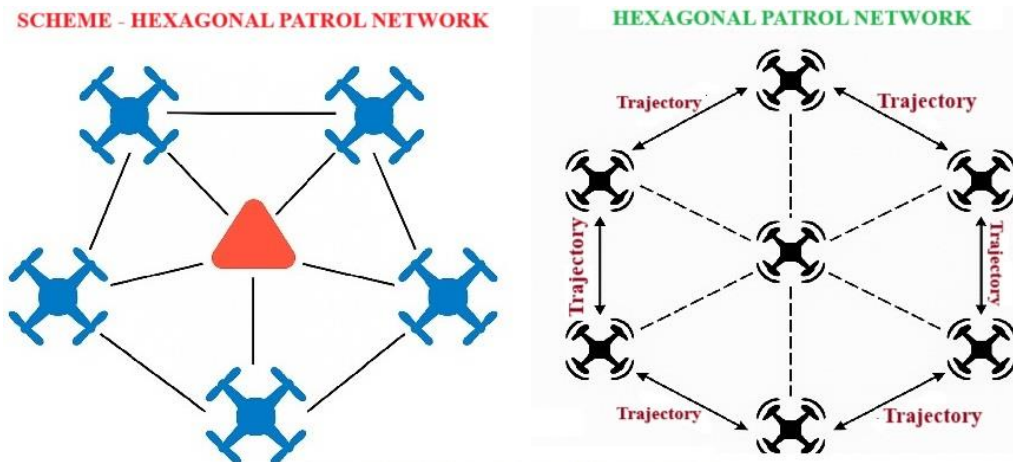


Figure 2. Schemes and visual representations

In this case, the positioning algebra is:

$$P(d_i, t) = f_i(x, y, z, t), \text{ where } f_i \in A, \text{ algebra of trajectories.}$$

III. Required Resources

III.1. Hardware

- Drone with GPS, proximity sensors, IR cameras, autonomy > 30 min.
- Base station + edge server for storage and analysis.

III.2. Software

- Algebraic calculation engine (e.g.: Python + SymPy / MATLAB).
- Aerial simulator (e.g.: Gazebo + ROS).
- Ad-hoc communication network (Mesh/LoRa/5G protocol).

III.3. Technical bibliography

- Choset et al. (2005) – *Principles of Robot Motion*.
- Russell & Norvig – *Artificial Intelligence: A Modern Approach*.
- T. Roughgarden – *Communication Networks*.
- Works on drone swarms, UAV coordination, algebraic topology in robotics.

III.4. Results and impact

- Autonomous drone networks reduce the need for physical security by 60–80%.
- Incident response is reduced to under 5 seconds.
- The system adapts to failures and operates without direct human intervention.
- The model is *scalable* and *replicable*: it can be adapted for farms, borders, large campuses.

Case Study 4.2. Aerial Algebra in STEAM Education.

Title: Interactive math lesson using programmable drones: introduction to vectors, coordinates and plane motion

I. Application context: In a real-world or STEAM-oriented Military College classroom, the teacher offers students an applied mathematics lesson using programmable mini-drones (e.g. Tello EDU, Parrot Mambo or DJI Robomaster TT). The goal is to deepen concepts of analytical geometry and algebra by simulating the drone's movements on an XOY plane, using mathematical commands.

II. Educational objectives:

- Introduction to the concepts of vectors and Cartesian coordinates.
- Application of algebraic operations to programming drone paths.
- Development of computational thinking, collaboration and transdisciplinary skills.

III. Link to Aerial Algebra: Aerial algebra becomes the conceptual framework through which the mathematical relationships between positions, trajectories and flight instructions are modeled. Each trajectory of the drone is interpreted as a vector in Cartesian space. Vector composition operations or transformations (translations, rotations) correspond to operations in algebraic structures (groups, monoids).

IV. Proposed teaching activity:

- Students receive a digital (or printed) map with a system of axes XOY.
- Drones are programmed to execute movements such as: "move 2 units on the axis OX, apoi 3 pe axa OY, apoi 1 pe diagonală".
- Students frame the movements into vectors.
- The sum of the vectors is calculated, the final coordinates are determined, the physical path of the drone is checked, and errors are discussed.
- Logical obstacles or checkpoints can be introduced to optimize the route – this way students practice algorithmization and decision-making logic.

V. Conceptual diagram: The image will be generated with a 2D map, the axes OX and OY, colored vectors, drone trajectory and stopping points.

VI. Required resources:

- 3-5 educational mini-drones with SDK (e.g.: Tello EDU).

- Mobile devices/tablets with programming application (Python, Scratch, DroneBlocks, etc.).
- Markers on the ground or on the board (XY grid).
- Projector, worksheets for vectors and algorithms.

VII. Expected results:

- Deep understanding of vectors and coordinates through real movement;
- Stimulating creativity and teamwork;
- Developing STEAM skills: modeling, programming, mathematical logic;
- Increasing students' motivation for mathematics and robotics.

VIII. Link to the curriculum: The activity can be integrated into mathematics lessons (vectors, coordinates, linear functions), computer science (algorithms, control structures) or robotics/STEAM classes.

IX. Possible extensions:

- Modeling linear or parabolic functions through flight paths.
- Introducing variables and loops for path optimization.
- Mathematical flight precision competitions.

Here are some concrete examples of extensions involving modeling linear and parabolic functions through flight paths of educational drones, in the context of Aerial Algebra and STEAM education:

IX.1. Modeling a linear function: $y = 2x + 1$.

Teaching purpose: Students will program a drone to follow the trajectory of a linear function in a discretized XOY plane (grid on the floor or on the screen), to understand the slope and intercept at the origin.

Stages:

- Choose a field: $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- Points are calculated: $(0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 7)$.
- The drone flies from one point to another: each flight is expressed as a vector in the XOY plane.
- Students notice that the flight is oblique and constant (the fixed slope is equal to 2).

Teaching resource: XOY map with visible markers and symbolic obstacles for error control.

IX.2. Modeling a parabolic function: $y = -x^2 + 4x$

Teaching purpose: Simulating the trajectory of a parabola, similar to a drone launch that climbs and then descends in plane 2D.

Stages:

- Domain: $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Points calculated: $(0; 0), (1; 3), (2; 4), (3; 3), (4; 0)$.

- Students program the drone to fly to these points successively, creating a curved trajectory.
- Drone flights are vectorized and expressed in algebraic form:

$$\vec{v}_1 = \{1; 3\}, \vec{v}_2 = \{1; 1\}, \vec{v}_3 = \{1; -1\} \text{ și } \vec{v}_4 = \{1; -3\}.$$

Teaching resource: Video simulation or physical drone with restricted flight on a suspended XOY frame (e.g. horizontal mesh).

IX.3. Other extensions:

- Comparisons between functions: The drone follows two routes (e.g. $y = x$ vs. $y = x^2$) for observing visual differences.
- 3D modeling: Can be expanded into space with functions $z = f(x, y)$ – for example: domes or paraboloids for STEAM clubs.
- Optimization:

Students design the minimum flight path that intersects points on a function – an introduction to programming and algorithmic thinking.

In conclusion, this case study highlights the applicability of Aerial Algebra in STEAM education, through an integrative, attractive and rigorous activity that transforms mathematics into an active and visible tool for exploring reality.

IX.4. Didactic extension: Variables and loops for route optimization

 *General objective:* To introduce students to *algebraic programming* concepts, using *variables* and *loops* to optimize the path of a drone that travels through multiple points in an aerial network (2D or 3D).

 *Application context:* A drone must deliver 4 objects to 4 different locations, located at known coordinates. The goal is to minimize the total distance or flight time.

 *Step 1: Defining the points.* Positions are defined as variables:

python

```
P1 = (1, 3)
P2 = (4, 7)
P3 = (6, 2)
P4 = (2, 5)
```

Step 2: Using loops for evaluation. Students create a simple script (e.g. in Python, Blockly, Arduino or Makeblock):

python

```
points= [P1, P2, P3, P4]
route= []
total distance= 0
for i in range(len(points) - 1):
    dx = points[i+1][0] - points[i][0]
    dy = points[i+1][1] - points[i][1]
```

```
distance= sqrt(dx**2 + dy**2)
total distance+= distance
route.append((points[i], points[i+1]))
```

Step 3: Optimization (TSP-type application)

Students can compare multiple orderings of points using a permutation function (brute force or simple heuristic) to find the optimal (shortest) path.

Example:

```
python
from itertools import permutations
min_distanta = inf
for perm in permutations(puncte):
    d = 0
    for i in range(len(perm)-1):
        d += distance(perm[i], perm[i+1])
    if d < min_distance:
        min_distance = d
        route_optimum = perm
```

Mathematical concept learned:

- Variables → abstraction and generalization.
- Loops → iterations, recurrence.
- Functions → modularization.
- Optimization → application of mathematical methods (TSP, Euclidean distance).
- Algorithmic thinking → sequences, cases, conditions.

Interdisciplinary applicability:

- Mathematics: functions, distance, equations, permutations.
- Informatics: control structures, lists, algorithms.
- Physics: speed, time, energy (in flight).
- Technology: robotic programming of the drone.
- Geography: orientation and spatial mapping.

 *STEAM educational outcomes:* students design a flight algorithm with dynamically changing parameters, understanding how algebra and programming optimize real-world solutions.

Conclusions

Aerial algebra is emerging as an emerging discipline with a solid theoretical foundation, articulated at the intersection of applied mathematics, distributed systems theory, communications engineering, and advanced technology-based education. This interdisciplinary branch proposes a unified formal framework for the description, optimization, and control of autonomous behaviors and distributed communications in

aerial networks, especially those involving unmanned aerial vehicles (UAVs), stratospheric platforms, or mobile robotic entities.

The foundations of aerial algebra combine rigorous algebraic structures with dynamic graphs, formal logic, and cryptographic tools, providing an expressive and extensible language for the analysis of functional relationships, communication protocols, and distributed decision algorithms in three-dimensional environments. Thus, aerial algebra redefines the way in which interactions between autonomous aerial entities are conceived and analyzed, moving from a purely geometric perspective to a relational, logical, and algorithmic one, in which airspace becomes an informational and operational support.

By formulating several types of definitions – general, specialized, applied and unified – the concept's capacity to adapt to various levels of use is demonstrated: fundamental research, technological applications, STEAM education training. The unifying definition (2.3) proposes a conceptual consolidation, highlighting the theoretical-applied nature of the field and its potential for expansion towards new cognitive and computational paradigms. This definitional flexibility responds to both academic and operational needs, offering analysis tools adapted to both complex network modeling and pedagogical design in transdisciplinary education.

The methodology associated with Aerial Algebra reflects its complexity and hybrid character: it combines formal approaches (relation theory, symbolic logic, operational algebra), computational modeling, numerical simulations, and case studies applied in real contexts. This methodological diversity not only validates the internal consistency of the concept, but also gives it an undeniable practical value in areas such as: cyber and physical security, aerial logistics, smart agriculture, aerial urbanism, digital education, and scientific exploration.

From an epistemological perspective, Aerial Algebra appears as a necessary response to the technological requirements of the autonomous and distributed era. It provides foundations for the formalization of the processes that govern the reorganization, adaptation and resilience of intelligent aerial networks, in a context in which mobility, interoperability and security are essential. In this sense, a new mathematical language – adapted to airspace – is established, capable of describing and controlling phenomena that until recently were difficult to approach rigorously.

At the same time, beyond the technical-scientific dimension, Aerial Algebra also finds its applicability in education, contributing to the formation of computational thinking, mathematical modeling skills and functional understanding of emerging technologies. Case studies integrated within STEAM education demonstrate its ability to transform mathematics into a living and exploratory tool, oriented towards solving authentic problems, in visual, interactive and collaborative contexts.

In conclusion, Air Algebra proposes a paradigm shift in the way airspace is perceived and managed – from a simple physical medium to a logical, relational and algorithmic environment, subject to formalization. Through this approach, an innovative, extensible and rigorous framework is created for research, engineering and education in the era of distributed communications, consolidating Air Algebra as a frontier field, indispensable in the architecture of future intelligent and autonomous distributed networks.

Article produced within the scientific research project "Methodology of ICT implementation in the process of studying real sciences from the perspective of the STEAM concept and Artificial Intelligence", code 040101, within the Institutional Research Program (2024-2027), approved by Ministry of Education and Research of the Republic of Moldova Order no. 102 of 01.02.2024

Bibliography

1. AFANAS, D., CHIRIAC, L., BRAICOV, A. Implementarea aparatelor de zbor pilotate de la distanță în cercetare și învățământ. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2020, nr. 2(20), pp. 7-12. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v20i2.7-12>.
2. AFANAS, D., BRAICOV, A. STEAM education through and for search missions. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2020, nr. 4(22), pp. 48-55. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v22i4.48-55>.
3. AFANAS, D., GARBUS, L. Matematica aeriană în concept STEAM. In: *Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale, (concept STEAM): Abordări inter/transdisciplinare în studierea matematicii (concept STEAM). Studiarea informaticii și tehnologiilor informaționale din perspectiva STEAM*, 29-30 octombrie 2021. Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2021, Vol.1, pp. 42-50. ISBN 978-9975-76-357-8.
4. AFANAS, D., BRIGALDA, A. STEAM approaches to drones in the teaching of exact disciplines. In: *Tehnologii fizice avansate cu aplicarea UVS în monitorizarea și modelarea factorilor de mediu*, 8 noiembrie 2024. Chișinău, Republica Moldova: Editura USM, 2024, Ediția a V-a, pp. 30-37. ISBN (pdf) 978-9975-62-819-8.
5. AFANAS, D., BRIGALDA, A. Modeling of broken lines through drones. In: *Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale, (concept STEAM)*, Ed. Ediția a 4-a, 27-28 octombrie 2024, Chișinău. Chișinău: CEP UPSC, 2024. pp. 72-83. ISBN 978-5-86654-132-4.
6. CASTI, J. L. *Five Golden Rules: Great Theories of 20th Century Mathematics – and Why They Matter*. Wiley, 2000.
7. CULLER, D., ESTRIN, D., & SRIVASTAVA, M. (2004). *Overview of Sensor Networks*. IEEE Computer, 37(8), 41–49. <https://doi.org/10.1109/MC.2004.93>
8. DIESTEL, R. (2017). *Graph Theory* (5th ed.). Springer.

9. STROGATZ, S. H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001. 410(6825), pp. 268–276. <https://doi.org/10.1038/35065725>.
10. TENENBAUM, J.M., WALTZ, D.L. An Algebraic Approach to Pattern Recognition. In: *Proceedings of the IEEE*, 1971. vol. 59(4), pp. 572–588.
11. WANG, P., BEKEY, G. Autonomous Distributed Control of Multi-Robot Systems. In: *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 1995. vol. 2(4), pp. 73–79.
12. БРИГАЛДА, А. Актуальні технології використання дронів у навчанні математики. In: *Роботи III Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Актуальні аспекти розвитку STEAM-освіти в умовах євроінтеграції» на базі Донецького державного університету внутрішніх справ, 24 квітня 2025 року*, ст. 242 – 245.

UDC: 37.02:514.1

APLICAREA UNOR TEHNICI DE REZOLVARE A PROBLEMELOR NEGEOMETRICE PRIN METODE GEOMETRICE

Laurențiu CALMUȚCHI, doctor habilitat, profesor universitar

<https://orcid.org/0000-0001-6665-7927>

e-mail: calmutchi.laurentiu@upsc.md

Catedra Matematică și Fizică

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. Rezolvarea problemelor negeometrice presupune utilizarea principiilor geometrice pentru a aborda probleme algebrice. Acest articol explorează aplicabilitatea metodelor geometrice în rezolvarea problemelor care nu sunt inițial formulate în termeni geometrici, demonstrând cum conceptele geometrice pot fi aplicate în diverse domenii. Articolul prezintă utilitatea metodelor geometrice în soluționarea problemelor negeometrice prin abordarea unor exemple relevante și demonstrează eficiența acestor tehnici în diferite contexte matematice.

Cuvinte-cheie: Metoda geometrică, reprezentare grafică, ecuație, sistem de ecuații, soluție.

APPLICATION OF SOME TECHNIQUES FOR SOLVING NON-GEOMETRIC PROBLEMS THROUGH GEOMETRIC METHODS

Abstract. Solving negeometric problems involves using geometric principles to address algebraic problems. This article explores the applicability of geometric methods in solving problems that are not originally formulated in geometric terms, demonstrating how geometric concepts can be involved in various fields. The article presents the usefulness of geometric methods in solving non-geometric problems by addressing relevant examples and demonstrates the effectiveness of these techniques in different mathematical contexts.

Keywords: Geometric methods, graphic representations, equation, system of equations.

Introducere. Matematica este o știință unitară, iar metode provenind din diferite ramuri pot fi utilizate complementar pentru rezolvarea unor probleme. Deși pare o afirmație paradoxală, uneori aplicarea unei metode geometrice la rezolvarea problemelor negeometrice poate aduce o perspectivă nouă, simplificând calculele și dezvoltând o înțelegere mai profundă a soluției.

Rezolvarea problemelor prezintă nucleul, sensul și izvorul interior al matematicii în sine. Mai întâi apare problema și abia apoi se construiește o teorie pentru a fi rezolvată. Deși adesea abordările algebrice sunt preferate, în unele cazuri, metodele geometrice pot oferi o perspectivă mai clară și mai eficientă.

Contribuția savanților la aplicarea rezolvării problemelor negeometrice prin metode geometrice a fost semnificativă de-a lungul istoriei matematicii. Iată câțiva dintre cei mai influenți savanți care au avut impact deosebit în acest domeniu: *Rene Descartes* a dezvoltat geometria analitică. El a introdus *coordonatele carteziane*, care au permis reprezentarea

problemelor algebrice în termeni geometrici. Această abordare a facilitat soluționarea problemelor negeometrice prin metode geometrice. *Henri Poincaré*, pionier în topologie și teoria sistemelor dinamice, Poincaré a folosit metode geometrice pentru a rezolva probleme din diverse domenii ale matematicii, inclusiv cele care nu sunt strict geometrice. *David Hilbert* a contribuit la formalizarea geometriei și a propus probleme care au fost rezolvate prin metode geometrice, influențând astfel modul în care se abordează problemele matematice în general.

Aceste contribuții au demonstrat că metodele geometrice pot fi aplicate cu succes în diverse domenii ale matematicii, inclusiv în cele care nu par a avea o legătură directă cu geometria. Această abordare interdisciplinară a dus la dezvoltarea unor tehnici inovatoare și la o înțelegere mai profundă a conceptelor matematice.

Cercetările recent realizate au introdus tehnici geometrice avansate pentru a înlocui analizele algebrice clasice. Întâlnim adesea probleme de geometrie care sunt rezolvate folosind algebra (diferite ecuații, sisteme de ecuații etc.). Mai puțin cunoscute sunt cazurile când problemele negeometrice (algebrice, aritmetice) pot fi rezolvate foarte convenabil în limbajul geometric, dar aceasta se face destul de rar, cu toate, că în colectivele de elevi unii posedă aceste înclinații, iar rezolvarea acestor probleme conduce vădit la dezvoltarea potențialului intelectual al elevului.

Procesul cheie constă în transformarea unei probleme negeometrice într-un context geometric echivalent. Aceasta implică etapele prezentate în fig.1.



**Figura 1. Etape de transformare a unei probleme negeometrice
în termeni geometrici**

1. *Identificarea relațiilor și proprietăților* prevede identificarea elementelor relevante din problemă și a relațiilor dintre acestea.
2. *Modelarea geometrică*. Construirea unei reprezentări geometrice a acestor relații folosind puncte, linii, suprafețe, curbe, etc.
3. *Interpretarea geometrică*. Analiza figurii geometrice rezultate pentru a extrage informații relevante despre soluția problemei inițiale.

Scopul acestui articol constă în: *Crearea și aplicarea tehnicilor și modalităților prin care elevii să rezolve probleme negeometrice într-un mod geometric pentru evidențierea avantajelor metodei geometrice de rezolvare a problemelor algebrice, constând în claritatea și eleganța soluției.* Principalele obiective propuse pentru atingerea scopului cercetării au fost: *identificarea problemelor algebrice care pot fi rezolvate prin metode*

geometrice, clasificarea lor, evidențierea avantajelor și dezavantajelor utilizării acestei metode.

Metode aplicate. Utilizarea metodelor geometrice și tehnicilor geometrice în rezolvarea problemelor algebrice este o abordare fascinantă care îmbină cele două ramuri fundamentale ale matematicii. Iată câteva modalități prin care aceste metode pot fi aplicate: reprezentarea grafică a funcțiilor; folosirea principiilor geometrice, cum ar fi intersecția; aplicarea teoremelor geometrice; utilizarea simetriei; folosirea tehnicilor trigonometrice pentru rezolvarea problemei algebrice; utilizarea diagramelor; aplicarea transformărilor geometrice, translația, rotația și reflexia care pot simplifica problemele algebrice.

Metodele geometrice aduc o dimensiune vizuală și abstractă în rezolvarea problemelor negeometrice. Ele permit explorarea relațiilor complexe între variabile și identificarea conexiunilor care pot fi ușor trecute cu vederea în rezolvarea tradițională a problemelor negeometrice. În continuare propunem strategii alternative de rezolvare a problemelor negeometrice prin metode geometrice.

Exemplul 1. De calculat $\sin(\arctg \frac{5}{7})$.

Soluție. Să observăm că toate valorile funcțiilor trigonometrice inverse de la numere pozitive sunt unghiuri situate în cadranul I, adică sunt unghiuri ascuțite. Toate astfel de unghiuri pot fi determinate în triunghiul dreptunghic. În cazul dat, $\arctg \frac{5}{7}$ este unghiul din triunghiul dreptunghic, tangenta căruia este egală cu $\frac{5}{7}$.

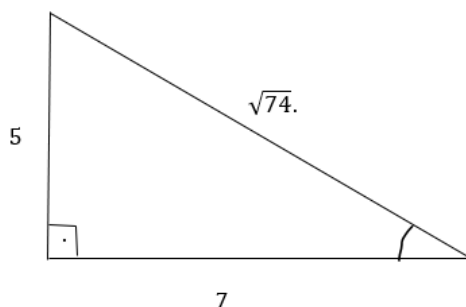


Figura 2

$$\sin\left(\arctg \frac{5}{7}\right) = \frac{5}{\sqrt{74}} \quad \text{sau} \quad \sin\left(\arctg \frac{5}{7}\right) = \frac{5\sqrt{74}}{74}.$$

Prin urmare, cateta opusă se raportează la cateta alăturată ca 5:7. Aplicând teorema lui Pitagora, determinăm ipotenuza egală cu $\sqrt{74}$ (Fig. 2). Acum putem determina valoarea oricărei funcții trigonometrice de la arctangentă.

Răspuns: $\frac{5\sqrt{74}}{74}$

Exemplul 2. Să calculăm $tg 15^\circ$:

Soluție. Elevii din clasa 10-a pot rezolva acest exemplu în felul următor.

$$tg 15^\circ = tg(60^\circ - 45^\circ) = \frac{tg 60^\circ - tg 45^\circ}{1 + tg 60^\circ \cdot tg 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

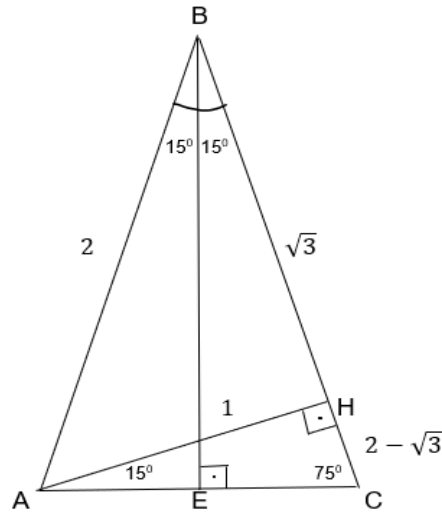


Figura 3

Acest exemplu poate fi rezolvat și de elevii clasei a 8-a.

Să cercetăm un triunghi isoscel ABC ($AB = BC$) și mărimea unghiului de la vârful B să fie egală cu 30° . Construim înălțimile BE și AH . Deoarece triunghiul este isoscel și măsura unghiului de la vârf este egală cu 30° , urmează că $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 75^\circ$. Din triunghiul AHC , urmează că $m(\widehat{HAC}) = 15^\circ$. Să considerăm că $AH = 1$, atunci triunghiul dreptunghic ABH , avem: $AB = 2$ și $BH = \sqrt{3}$. Atunci, $HC = BC - BH = 2 - \sqrt{3}$. Din triunghiul AHC , obținem: $\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{CH}{AH} = 2 - \sqrt{3}$.

Răspuns: $2 - \sqrt{3}$.

Exemplul 3. De demonstrat identitatea

$$\frac{1}{\sin(51\frac{3}{7})^\circ} + \frac{1}{\sin(77\frac{1}{7})^\circ} = \frac{1}{\sin(25\frac{5}{7})^\circ}.$$

Soluție. Vom aplica așa-numita metodă a triunghiului isoscel. Construim un triunghi isoscel arbitrar (Fig.4).

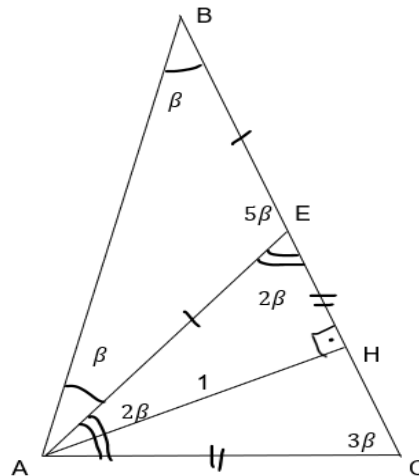


Figura 4

Observăm că triunghiurile ABC , ABE și ACE sunt isoscele. Notăm mărimea unghiului ABC prin β . Atunci, toate unghiurile din figura construită pot fi exprimate prin

β . Observăm că suma unghiurilor în cele trei triunghiuri isoscele este egală cu 7β . Prin urmare, $7\beta = 180^\circ$ sau $\beta = \left(25\frac{5}{7}\right)^\circ$. Fie $AH \perp BC$.

Evident, AH este înălțime comună pentru triunghiurile ABC , ABE și ACE . Fie $AH = 1$. Atunci, din $\triangle ABH$ avem că $\frac{1}{\sin \beta}$, $AB = \frac{1}{\sin(25\frac{5}{7})^\circ}$. Prin urmare și $BC = \frac{1}{\sin(25\frac{5}{7})^\circ}$. Din $\triangle AEH$ $AE = \frac{1}{\sin(51\frac{3}{7})^\circ} = BE$. Din $\triangle ACH$ $AC = \frac{1}{\sin(77\frac{1}{7})^\circ} = EC$. Deoarece $BE + EC = BC$, obținem:

$$\frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ} + \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ} = \frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^\circ}.$$

Demonstrarea este completă.

Exemplul 4. Pentru numerele pozitive x , y și z din condițiile

$y^2 + z^2 = 50$, $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169$, $x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144$, fără a determina valorile x, y, z , de calculat valoarea expresiei $xy + yz + xz$.

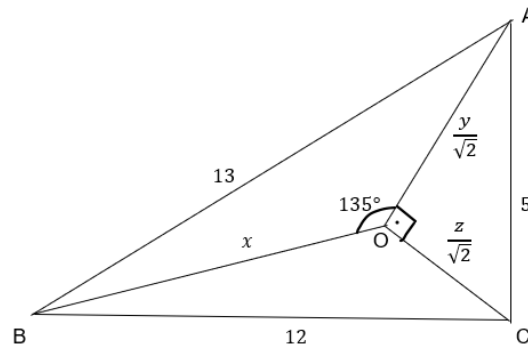


Figura 5

Soluție. Scriem condițiile problemei sub forma unui sistem de ecuații.

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 25 \\ x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169 \\ x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144. \end{cases}$$

În limbaj geometric, conform teoremei inverse-teoremei lui Pitagora, numerele $\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{\sqrt{2}}$ și 5 sunt corespunzătoare lungimilor catetelor și ipotenuzei triunghiului AOC cu unghiul drept AOC , iar numerele $x, \frac{y}{\sqrt{2}}$ și 13 sunt lungimile laturilor triunghiului AOB , în care unghiul AOB are 135° . Această concluzie urmează din teorema inversă teoremei cosinusurilor. Analogie, numerele $x, \frac{z}{\sqrt{2}}$ și 12 sunt lungimile laturilor triunghiului BOC în care unghiul BOC are 135° .

Deoarece $12^2 + 5^2 = 169$, atunci în triunghiul ABC unghiul C este drept.

$$A_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} yz ;$$

$$A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \sin 135^\circ = \frac{1}{4} xy ;$$

$$A_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{z}{\sqrt{2}} \sin 135^\circ = \frac{1}{4} xz ;$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 .$$

Aşa cum, $A_{\Delta AOC} + A_{\Delta AOB} + A_{\Delta BOC} = A_{\Delta ABC}$, obţinem:

$$\frac{1}{4} yz + \frac{1}{4} xy + \frac{1}{4} xz = 30 \text{ sau } xy + yz + xz = 120.$$

Răspuns: 120.

Exemplul 5. De calculat $tg(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5})$.

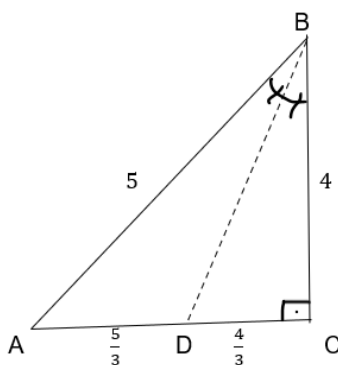


Figura 6

Soluție. Construim un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept C , cateta $AC = 3$ și ipotenuza $AB = 5$ (Fig.6). Conform Teoremei lui Pitagora $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Construim bisectoarea BD în triunghiul ABC . Conform proprietății bisectoarei în triunghi, avem:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{AD}{3 - AD} \Rightarrow 4AD = 5(3 - AD) \Rightarrow 9AD = 15 \\ &\Rightarrow AD = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \rightarrow CD = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Prin urmare, $tg\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5}\right) = tg\left(\frac{1}{2} m\widehat{ABC}\right) = tg(m\widehat{DBC}) = \frac{CD}{BC} = \frac{4}{3} : 4 = \frac{1}{3}$.

Răspuns: $\frac{1}{3}$.

Exemplul 6. Distanța dintre orașele A și B este egală cu 400 km. Un biciclist și un motociclist pornesc în același timp unul în întâmpinarea celuilalt. În drum ei s-au întâlnit la o stație de alimentare. Biciclistul ajunge în orașul B în 9 ore după întâlnire, iar motociclistul ajunge în orașul A după 4 ore după întâlnire. De aflat distanța de la orașul A până la locul unde s-au întâlnit.

Soluție. Construim un sistem rectangular de coordonate în plan (Fig.7). Pe axa orizontală vom depune timpul (în ore), iar pe axa verticală vom depune distanța (în kilometri).

Construim în acest sistem graficele dependenței distanței de timp, considerând că vitezele de mișcare a biciclistului și motociclistului sunt uniforme.

Fie segmentul AA_1 este graficul mișcării biciclistului, segmentele BB_1 - graficul mișcării motociclistului, iar O - punctul în care s-au întâlnit. Din condiția problemei, avem: $AB = 400$, $DB_1 = 4$.

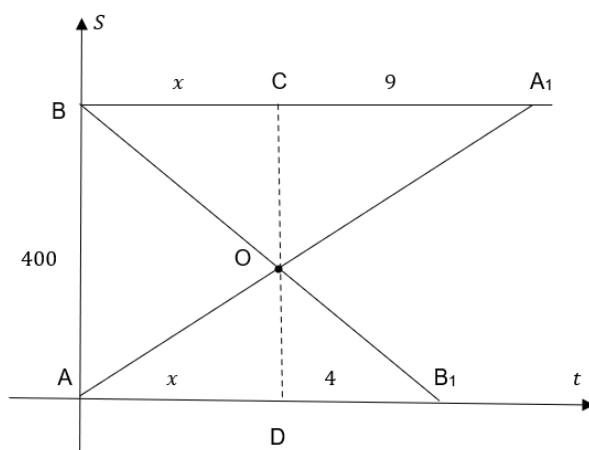


Figura 7

Fie timpul până la întâlnire egal cu x ore. Cercetăm triunghiurile asemenea OCA și ODA (după două unghiuri), avem:

$$\frac{CA_1}{AD} = \frac{OC}{OD} \quad (1).$$

Din triunghiurile asemenea OCB și ODB_1 (după două unghiuri), avem:

$$\frac{BC}{DB_1} = \frac{OC}{OD} \quad (2).$$

Din 1) și 2), obținem:

$$\frac{CA_1}{AD} = \frac{BC}{DB_1} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6, AB_1 = 6 + 4 = 10.$$

Din triunghiurile asemenea DOB_1 și ABB_1 , avem:

$$\frac{OD}{AB} = \frac{DB_1}{AB_1} \Rightarrow \frac{OD}{400} = \frac{4}{10} \Rightarrow OD = 160(km).$$

Răspuns: 160 km.

Exemplul 7. De rezolvat inecuația $\sqrt{x} \geq 1 - x$.

Soluție. Construim într-un sistem rectangular de coordonate graficele funcțiilor

$$y_1 = 1 - x \quad \text{și} \quad y_2 = \sqrt{x} \quad (\text{Fig. 8})$$

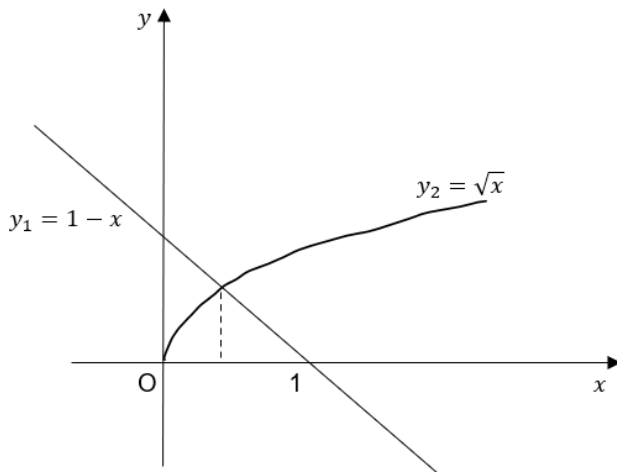


Figura 8

În limbaj geometric, a rezolva inecuația $\sqrt{x} \geq 1 - x$, se înțelege a determina acele valori a variabilei x , pentru care graficul funcției $y_2 = \sqrt{x}$ este situat mai sus de graficul funcției

$y_1 = 1 - x$. Din fig.7 se vede că ecuația $\sqrt{x} = 1 - x$ are o singură rădăcină și că ea aparține intervalului $(0; 1)$

Rezolvăm ecuația $\sqrt{x} = (1 - x)^2$,

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Intervalului $(0; 1)$ îi va aparține doar rădăcina $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Graficul funcției $y_2 = \sqrt{x}$ este situat mai sus de graficul funcției $y_1 = 1 - x$ pentru $x > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Răspuns: $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; +\infty)$.

Exemplul 8. De aflat cea mai mică valoare a funcției $y = \sqrt{x^2 - 2x + 17} + \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Soluție. Scriem funcția dată sub forma:

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + 16} + \sqrt{(x-3)^2 + 4} \text{ sau}$$

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + (0 \pm 4)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (0 \pm 2)^2}.$$

Observăm, că primul termen $\sqrt{(x-1)^2 + (0 \pm 4)^2}$ în limbaj geometric, reprezintă distanța dintre punctele $A(x; 0)$ și $B(1; \pm 4)$, iar al doilea termen $\sqrt{(x-3)^2 + (0 \pm 2)^2}$ - distanța dintre punctele $A(x; 0)$ și $C(3; \pm 2)$. Evident, suma distanțelor va fi cea mai mică în cazul, când punctele A , B și C vor fi situate pe una și aceeași dreaptă, ce intersectează axa absciselor.

Punctele B și C trebuie să fie situate pe părți diferite de axa absciselor, astfel încât sunt posibile două cazuri: $B(1; -4)$, $C(3; 2)$ (Fig.9) sau $B(1; 4)$, $C(3; -2)$ (Fig.10). Scriem ecuația dreptei BC : $y = kx + b$ în două cazuri:

$$B(1; -4), C(3; 2) : \begin{cases} -4 = k + b \\ 2 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 - k \\ 3k - 4 - k = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 - k \\ 2k = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -7 \\ k = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 3x - 7$$

$$A(x; 0) \in y = 3x - 7 \Rightarrow 0 = 3x - 7, 3x = 7, x = \frac{7}{3}.$$

$$y_{min} = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 1\right)^2 + 16} + \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 3\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{160} + \sqrt{40}}{3} = \frac{4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}}{3} = 2\sqrt{10}.$$

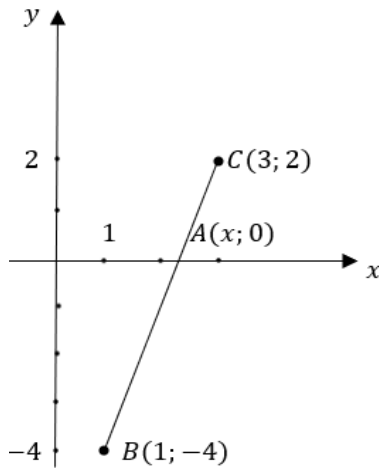


Figura 9

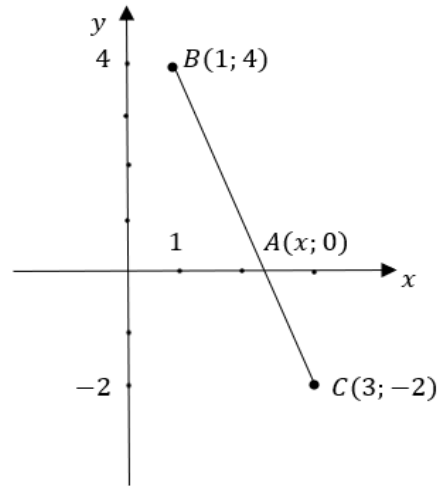


Figura 10

Răspuns: $2\sqrt{10}$.

Exemplul 9. De aflat cea mai mică valoare a parametrului c , pentru care sistemul

$$\begin{cases} (x - c\sqrt{3})^2 + y^2 - 2y = 0, \\ y = \sqrt{3}|x| - 4 \end{cases}$$

are o singură soluție.

Soluție. Să observăm că prima ecuație a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$(x - c\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Această ecuație determină o familie de cercuri cu raza constantă, egală cu 1, iar toate centrele acestor cercuri aparțin dreptei $y=1$.

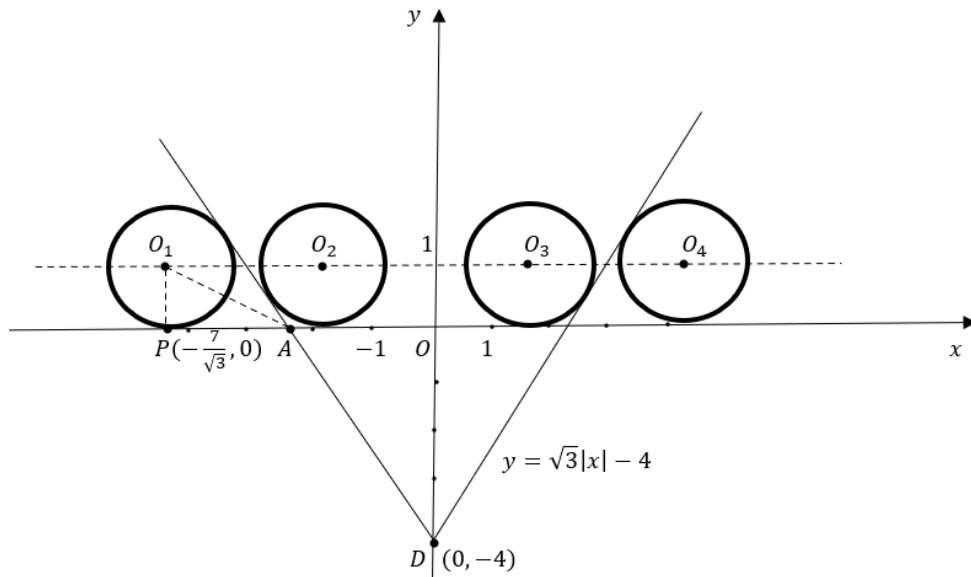


Figura 11

Construim graficul funcției $y = \sqrt{3}|x| - 4$ (Fig.11). În același sistem de coordonate construim patru poziții ale cercurilor, pentru care sistemul inițial are o singură soluție. Fiecărui cerc indicat îi corespunde o anumită valoare a parametrului c . Așa cum, condiția problemei cere ca c să primească cea mai mică valoare, atunci din cele 4 cercuri trebuie de

ales acel cerc, abscisa centrului căreia primește valoarea cea mai mică. Evident, acesta este cercul cu centrul O_1 .

Observăm că $|c\sqrt{3}| = AP + AO = AP + \frac{4}{\sqrt{3}}$. Din $\triangle AOD$ $tg(\widehat{OAD}) = \sqrt{3}$. Atunci, $m(\widehat{O_1AP}) = \frac{1}{2} m(\widehat{DAO}) = 30^\circ$.

Din $\triangle O_1PA$: $PA = O_1P \cdot ctg30^\circ = \sqrt{3}$. Prin urmare, $|c\sqrt{3}| = \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$. Deoarece poziția centrului O_1 îi corespunde $c < 0$, atunci $-\sqrt{3}c = \sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$, $c = -\frac{7}{3}$.

Răspuns: $c = -\frac{7}{3}$.

Rezultate și discuții. Tehnicile geometrice aplicabile în rezolvarea problemelor negeometrice rezultă din geometria analitică, transformări geometrice și geometria combinatorică care fac parte din *metodele geometrice fundamentale*. Metodele geometrice prezentate anterior au dovedit a fi eficiente în soluționarea problemelor negeometrice propuse, uneori cu mici abateri.

Avantajele și limitările utilizării metodelor geometrice în rezolvarea problemelor algebrice sunt indicate în Tabelul 1.

**Tabelul 1. Avantaje și limitări a utilizării metodei geometrice
la rezolvarea problemelor algebrice**

Avantaje	Limitări
Vizualizare intuitivă a problemei	Complexitate pentru unele probleme
Simplitate, oferă soluții rapide	Abordări geometrice limitate
Generalizare cu aplicare largă de probleme	Limitări de precizie
Conexiuni interdisciplinare	Necesitatea expertizei la anumite etape

Rezultatele obținute sugerează că metodele geometrice reprezintă o abordare utilă și vizuală pentru rezolvarea ecuațiilor cu parametri. Deși au limitatii în fața ecuațiilor complexe, aceste tehnici pot fi utilizate cu succes în educație și în cercetări aplicate. În viitor, dezvoltarea unor algoritmi geometrico-algebrici ar putea îmbunătăți aceste abordări. Algoritmul rezolvării problemelor negeometrice prin metode geometrice se prezintă în Figura 2.

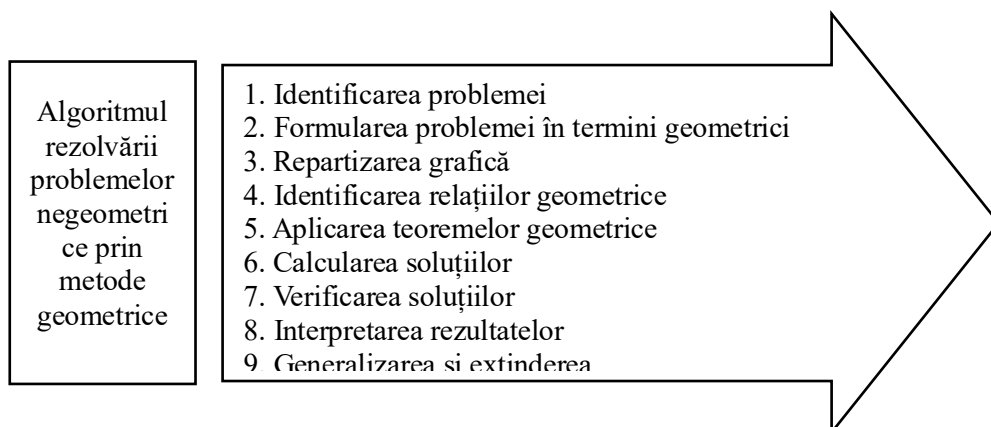


Figura 12. Algoritmul rezolvării problemelor negeometrice prin metode geometrice

Prin acest algoritm, putem transforma problemele negeometrice în probleme geometrice, facilitând astfel rezolvarea lor. Transformarea unei probleme negeometrice și rezolvarea ei este un proces valoros, care permite rezolvarea unor probleme complexe.

Concluzii

Metodele geometrice au demonstrat că pot oferi soluții inovative și eficiente pentru probleme care nu sunt în mod tradițional considerate geometrice. De la optimizare și algebra până la teoria grafurilor, aplicarea acestor metode a deschis noi direcții de cercetare. Viitorul cercetării în acest domeniu se află în extinderea acestor tehnici pentru a include probleme mai complexe și mai abstracte, în care geometria poate juca rolul esențial. Integrarea metodelor geometrice în rezolvarea problemelor algebrice nu doar că oferă soluții alternative, dar și îmbunătățește înțelegerea conceptelor matematice prin vizualizare. Această abordare multidisciplinară este esențială în educația matematică, deoarece ajută elevii să dezvolte o gândire critică și creativă. Utilizarea acestor tehnici poate face procesul de învățare mai captivant și mai intuitiv.

Bibliografie

1. БЛИНКОВ А. Д. *Геометрия в негеометрических задачах*. Москва: Издательство МЦНМО, 2016, 155 с.
2. ГЕНКИН, Г. З. *Геометрические решения негеометрических задач*. Москва: Просвещение, 2007. 80 с.
3. ДАЛИНГЕР, В.А. *Задачи с параметрами*. Москва: Издательство Юрайт, 2020-460 с.
4. КОНОВАЛОВА, Д. Г. Геометрическое решение негеометрических задач. In: *Научно-методический электронный журнал «Концепт»*, 2015. т. 25. pp. 211–215. URL: <http://e-koncept.ru/2015/65345.htm>

UDC: 37.015.3: 581.6

ÎNVĂȚAREA INTER-TRANSDISCIPLINARĂ – IMPERATIVUL ZILEI DE AZI

Eugenia CHIRIAC, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-5935-0414>, e-mail: chiriac.eugenia@upsc.md

Sofia GRIGORCEA, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-4948-6430>, e-mail: grigorcea.sofia@upsc.md

Facultatea Biologie și Chimie

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Odetta ȚIGANAȘ, doctor, conferențiar universitar

Instituția Publică Liceul Teoretic „Spiru Haret”, Chișinău, Republica Moldova

Abstract. În domeniul educațional, activarea interesului cognitiv în rândul elevilor/studentilor este una dintre prioritățile educației moderne, contribuind astfel la dezvoltarea gândirii aplicative, având la bază strategia de învățare care împreună cu resetarea disciplinelor reale contribuie la formarea competențelor de creativitate, originalitate, redescoperire și reinventare. Studiul funcțiilor și caracteristicilor unor sisteme individuale din natură au ca scop elaborarea unor noi tehnologii performante care ar contribui la progresul tehnico-științific, medicină, educație etc. Un exemplu în acest sens îl reprezintă algele microscopice, denumite diatomee, scheletul cărora a inspirat arhitecții cu mostre de structuri rezistente, precum domul geodezic, care reprezintă o icoană emblematică a arhitecturii moderne, unde cu un profil gata făcut și o cantitate minimă de material, se poate obține un maxim de rezistență și frumusețe.

Cuvinte-cheie: bionica, educație, învățare, interdisciplinaritate, transdisciplinaritate, competențe, dezvoltare.

INTER-TRANSDISCIPLINARY LEARNING – TODAY'S IMPERATIVE

Abstracts. In the educational field, activating cognitive interest among students is one of the priorities of modern education, thus contributing to the development of applied thinking, based on the learning strategy that, together with the resetting of real disciplines, contributes to the formation of creativity, originality, rediscovery and reinvention skills. The study of the functions and characteristics of individual systems in nature aims to develop new high-performance technologies that would contribute to technical and scientific progress, medicine, education, etc. An example in this regard is microscopic algae, called diatoms, whose skeleton has inspired architects with samples of resistant structures, such as the geodesic dome, which represents an emblematic icon of modern architecture, where with a ready-made profile and a minimum amount of material, maximum resistance and beauty can be achieved.

Keywords: bionics, education, learning, interdisciplinarity, transdisciplinarity, skills, development.

1. Introducere

Astăzi, trăim într-o lume în care ritmul schimbărilor tehnologice și al inovațiilor crește vertiginos, conducând la schimbări majore în toate aspectele vieții noastre, inclusiv în educație. Astfel, imperativul prezentului, după cum afirmă mulți specialiști în educație, este pregătirea generațiilor tinere pentru viitor. Acest fapt impune stabilirea unor noi priorități în procesul de instruire, precum și conceperea inter-transdisciplinarității nu numai

în sensul integrării cunoștințelor, ci și ca mod de gândire și acțiune pentru dezvoltarea competențelor secolul XXI. Rolul profesorului în acest sens, este de a facilita învățarea prin aplicarea unor strategii și metode captivante și inspirate, conectând experiențele educaționale cu oportunitățile din viața reală. Competențele STEAM vor fi esențiale pentru a face față unora dintre cele mai mari provocări globale, privind *Dezvoltarea durabilă*.

O modalitate de organizare curriculară care trece de nivelul conținutului respectiv și care vizează metode, respectiv, atitudini specifice este predarea inter-transdisciplinară. Procesul de creare a unui modul interdisciplinar implică intersectarea diferitelor domenii disciplinare, fiind deseori omise limitele stricte ale disciplinelor individuale. Prin adoptarea unei astfel de abordări interdisciplinare, se pot atinge obiective de învățare și competențe de ordin superior, cum ar fi capacitățile metacognitive care reprezintă baza dezvoltării competențelor integrate/transversale (luarea deciziilor, rezolvarea problemelor), transferurile metodologice și conceptuale dintr-o disciplină în alta, și chiar fuziunea disciplinelor.

Aceasta din urmă, reprezintă în cea mai mare parte abordarea transdisciplinară, caracterizată prin cel mai înalt grad de integrare a curriculumului, axată pe noi domenii de investigație și programe de cercetare, incluzând toate nivelele anterioare (disciplinar, pluridisciplinar, interdisciplinar și transdisciplinar), concentrată pe aspectele vieții cotidiene cu adevărat semnificative. În literatura de specialitate, învățarea transdisciplinară a fost ridicată la rangul de „noua viziune asupra lumii”, iar abordarea transdisciplinară a unor aspecte poate duce la înțelegerea și soluționarea provocărilor complexe a lumii prezente [3].

Actualmente, științele reale trec printr-o dezvoltare impetuoasă care se materializează print-un șir de transformări, inclusiv, transferuri de idei, concepte, aplicații din domeniul biologiei în cel al tehnicii și tehnologiei. În domeniul educațional, activarea interesului cognitiv în rândul elevilor/studentilor este una dintre prioritățile educației moderne, contribuind astfel la dezvoltarea gândirii aplicative, având la bază strategia de învățare care împreună cu resetarea disciplinelor reale contribuie la formarea competențelor de creativitate, originalitate, redescoperire și reinventare.

Natura, care prin definiție este perfectă, iar formele ei sunt ideale, reprezintă caracteristici universale și generale pe care le percepem prin sentimente de uimire și admirație, armonie și proporționalitate și care ne marchează existența emoțională și socială [2].

Melissa Sterry, fondatoarea *Bionic City*, una dintre cele mai importante companii din *Marea Britanie*, care explorează potențialul naturii în construcția orașelor din viitor, consideră că arhitecții trebuie să lucreze alături de cercetători și practicieni din diferite domenii, în realizarea proiectelor de impact pentru noile generații, ținând cont de influența naturii în viața omului. Ea afirmă că „În timp ce omenirea construiește să dureze, natura

construiește să evolueze. Flora și fauna prezintă o gamă largă de strategii și flexibilitate, iar un lucru pe care-l au în comun este că evoluează constant”.

Studiul funcțiilor și caracteristicilor unor sisteme individuale din natură au ca scop elaborarea unor noi tehnologii performante care ar contribui la progresul tehnico-științific, medicină, educație etc. Un exemplu în acest sens îl reprezintă algele microscopice, denumite diatomee.

2. Caracterizarea biologică și geometria peretelui celular ale unor diatomee

Diatomeele sau bacilariofitele sunt alge microscopice, unicelulare solitare sau coloniale, incluzând peste 100 000 de specii acvatice (planctonice și bentonice). Acestea reprezintă un grup de organisme puternic diferențiat și specializat, cu un tip particular de perete celular. Din punct de vedere chimic, peretele celular sau carapacea unei diatomee este formată din substanțe minerale (silice) și organice (celuloză și pectină). Prin calcinare, substanța organică se distruge și rămâne numai scheletul silicios. Carapacea se păstrează și după moartea organismului.

Forma exterioară a diatomeelor prezintă corpuri geometrice în formă de triunghi, cerc, romb, elipsă, sferă, cilindru, suveică, bastonașe etc. Reieșind din particularitățile structurale și modul de înmulțire, se deosebesc diatomee penate (formă alungită, eliptică, de bastonaș) și diatomee centrice (formă cilindrică sau de disc cu simetrie radiară, lipsite de rafă). Peretele celular este reprezentat de o teacă de natură proteică și mineralizată cu SiO_2 , formată din două părți: *epiteca* (mai mare) și *hipoteca* (mai mică). Aceste două teci nu se angrenează fix între ele, ținându-se împreună, datorită citoplasmei care aderă pe dinăuntru peretelui celular. Atât epiteca cât și hipoteca au două părți diferite: valva (fundul) și pleura sau profilul. Uneori între valve și pleure se găsesc zone intercalare (copule). Pe valve se formează adesea, ornamentații în formă de linii paralele, puncte etc., rezultate din îngroșările membranei secundare ale celulei. La multe diatomee pe epitecă se găsește o adâncitură longitudinală numită rafă. În secțiune transversală, peretele unei valve apare dublu, fiind alcătuit din două părți care se susțin una pe alta, cu ajutorul pereților perpendiculari. În partea superioară a peretelui se pot observa perforații mari, iar în partea inferioară perforațiile sunt mai mici și au forma unor pori fini. Prin aceste perforații protoplasma organismului comunică cu mediul extern, determinând mișcările de deplasare activă în direcția axei longitudinale.

3. Aspecte aplicative: peretele celular al diatomeelor – model bionic

Scheletul diatomeelor a inspirat arhitecții cu mostre de structuri rezistente, unde cu un profil gata făcut și o cantitate minimă de material, se poate obține un maxim de rezistență și frumusețe. În acest context, arhitectul american, *Buckminster Fuller*, un simbol al arhitecturii moderne din anii 50 ai secolului trecut, bazându-se în mare parte pe

structura membranei silicioase a unei specii de diatomee, numită *Stephanopyxis turris*, a descoperit mecanismul ce stă la baza acestei structuri, grație căreia în anul 1954, a obținut un brevet referitor la domul geodezic, care reprezintă o icoană emblematică a arhitecturii moderne [1].

Figurile geometrice și domul geodezic

Cupolele geodezice sunt poliedre cu fețe triunghiulare plate, care generează pentagoane și hexagoane, ale căror vârfuri coincid cu suprafața unei sfere imaginare care o circumscrie. Cele mai multe dintre ele, sunt derivate din icosaedru (20 de fețe triunghiulare), considerată de specialiștii din domeniu, o sferă geodezică de frecvență 1. Întrucât forma proiectată este prea geometrică, acest lucru poate duce la înțelegerea greșită că nu există nicio relație cu natura. În anul 1998, Fuller a afirmat că natura favorizează modelul sferic și că *„Aceasta ar fi o reprezentare a sistemului de coordonate al naturii, care a declanșat studiul matematicii pentru ingineria acestei configurații”*. O mare parte din avantajul structural al domului geodezic provine din stabilitatea enormă, oferită de plasa triunghiulară. După cum afirmă specialiștii în domeniu, un triunghi, este un element stabil independent de dimensiunea sa, singura formă rigidă, chiar și atunci când sunt construite cu conexiuni flexibile, fiecare vârf stabilizându-se pe partea opusă. În 1979, Fuller afirmă că *„Triunghiul persistă în Univers ca un model constant. Orice alte modele cunoscute sunt recunoscute în mod inerent numai în virtutea integrității lor structurale, triunghiulare. Doar modelele structurate triunghiular sunt modele regenerative, iar structurarea triunghiulară este un standard de integritate în sine”*. Totodată, Fuller descrie forța dintre un dreptunghi și un triunghi în cazul când este aplicată o presiune asupra ambelor structuri. *„Dreptunghiul se îndoaie peste vârfurile sale și ar fi instabil, dar triunghiul rezistă la presiune și este de aproximativ de două ori mai puternic și mai rigid”*, afirmă arhitectul.

Acest principiu i-a ghidat studiile către crearea cupolei geodezice, în care a descoperit că, dacă s-ar crea o structură sferică din triunghiuri, aceasta ar avea o putere inegalabilă. Astfel, poliedrele formate în întregime din fețe triunghiulare regulate, corespund structurilor mai auto-stabilizate și, prin urmare, sunt cele mai indicate și utilizate de Fuller, în configurațiile geodezice, întrucât alte geometrii precum pătratele, pentagoanele, hexagoane au tendința inerentă de deformare. *„Triunghiul este o figură matematică naturală care, în combinație cu alte triunghiuri, oferă eficiență maximă cu efort structural minim, prin reunirea unei serii de unități geometrice, identice, care sunt auto-susținute și ușoare”*, spune Fuller, iar *„sferele se potrivesc perfect cu principiul - a face mai mult cu mai puțin, deoarece includ cel mai mare volum cu cea mai mică suprafață în cupole, or, aceasta înseamnă o garanție de economisire a materialului”*. Conform, specialiștilor din domeniu, structura sferică a unui dom geodezic este una dintre cele mai eficiente atmosfere

interioare pentru locuințele umane, deoarece aerul și energia pot circula fără obstacole, permițând atât încălzirea, cât și răcirea să aibă loc în mod natural.

Forma cupolei geodezice este foarte avantajoasă, deoarece optimizează sarcina, deplasând forțele în toată structura sa. Este ergonomică, aerodinamică și rezistentă la situații extreme precum: vânturile puternice, furtunile, cutremurele și acumulările de zăpadă. Domul geodezic combină stabilitatea inerentă a triunghiurilor cu raportul avantajos dintre volumul și suprafața unei sfere, ceea ce are ca rezultat mai puține materiale de construcție și mai mult spațiu, inclusiv, reducerea costurilor pentru întreținere [1].

Concluzii

Interesul cultivat la elevi/studenți, în procesul de predare-învățare a modelelor bionice, contribuie la stimularea motivației și aprofundarea cunoștințelor nu numai în domeniul biologiei, dar și al disciplinelor conexe, cum ar fi matematica, fizica, chimia, informatica, geografia, istoria, ș.a., atât la nivelul învățământului general cât și cel universitar, stimulându-se astfel, educația de cercetare, axată pe inter- și transdisciplinaritate, cât și educația comportamentală a generațiilor de mâine, care poate avea un rol semnificativ, inclusiv, în conservarea biodiversității și educației ecologice.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024

Bibliografie

1. CHIRIAC, E. Coordonator științific: CHIRIAC, L. *Elemente de bionică*. ÎS FEP „Tipografia Centrală”. Chișinău. 2024. 176 p.
2. CHIRIAC, E., GRIGORCEA, S., NEDBALIUC, B., ALUCHI, N., ȚIGANAȘ, O. Conceptul STEAM din perspectiva educației ecologice. In: *Materialele Conferinței Științifice Internaționale „Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale, (Concept STEAM)”*, ediția a patra Dedicată memoriei Profesorului Universitar Andrei Hariton. Chișinău, 01 – 02 Noiembrie, 2024.
3. ȚIGANAȘ, O., CHIRIAC, E., GRIGORCEA, S. *Didactica biologiei din perspectiva inter-și transdisciplinarității*. MEC al RM, UPSC. Chișinău: [S.n.], (CEP UPSC). 2025. 286 p.

UDC: 37.02:51:004.8

REMODELAREA PROCESULUI DE EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ DIN PERSPECTIVA PERFORMANȚELOR IA

Liubomir CHIRIAC, doctor habilitat, profesor universitar

<https://orcid.org/0000-0002-5786-5828>

e-mail: chiriac.liubomir@upsc.md

Natalia LUPAȘCO, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-3854-2521>

e-mail: lupasco.natalia@upsc.md

Elisa-Ioana FEȚANU, drd., prof. titular, gradul didactic I

<https://orcid.org/0009-0005-1363-5202>

e-mail: ely_oana1986@yahoo.com

Liceul Teoretic Marin Preda, București

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Chișinău

Rezumat. În acest articol sunt examinate cele mai importante modalități de învățare ale sistemelor inteligența artificială (IA) și aplicarea lor în procesul de studiere a matematicii. Tehnologiile moderne modifică rapid sistemul educațional, iar inteligența artificială joacă un rol cheie în acest proces. Matematica este una dintre științele cheie în care IA poate deveni un instrument puternic pentru predarea-învățarea, automatizarea sarcinilor de rutină și personalizarea educației. Cum este deja utilizată IA în lecțiile de matematică și ce perspective/amenințări se deschid pentru profesori și elevi. Se face o caracteristică succintă ale sistemelor de IA utilizate la studierea matematicii. La fel sunt analizate diverse probleme de matematică soluționate prin intermediul sistemelor IA, pecum: *Julius AI și Mathos IA*.

Cuvinte cheie: inteligență artificială, învățare automată, învățare profundă, sistemele de IA utilizate la studierea matematicii.

REMODELLING THE MATHEMATICS EDUCATION PROCESS FROM THE PERSPECTIVE OF AI PERFORMANCE

Abstract. This article examines the most important ways of learning artificial intelligence (AI) systems and their application in the process of studying mathematics. Modern technologies are rapidly changing the education system, and artificial intelligence plays a key role in this process. Mathematics is one of the key sciences in which AI can become a powerful tool for teaching-learning, automating routine tasks and personalizing education. How AI is already used in mathematics lessons and what prospects/threats open up for teachers and students. A brief characteristic of AI systems used in studying mathematics is given. Various mathematical problems solved by means of AI systems, such as: Julius AI and Mathos AI, are also analyzed.

Keywords: artificial intelligence, machine learning, deep learning, AI systems used in studying mathematics

1. Forța transformatoare a Inteligenței Artificiale

Inteligența Artificială (IA) reprezintă nu numai o tehnologie utilă de ultima oră dar, în același timp, este și o forță transformatoare. O forță care volens-nolens remodelează întregul proces de organizare a sistemului educațional, inclusiv strategiile și mijloacele de soluționare a problemelor din diferite sfere de activitate ale omului modern: economie, tehnologie, educație, robotică, politică etc.

Fondatorul inteligenței artificiale este considerat celebrul matematician englez, Alan Turing. În acest sens să ne reamintim de faimosul Test Turing prin intermediul căruia s-ar putea clarifica dacă competențele calculatorului de-a judeca, argumenta, fundamenta este analog modalității de gândire a omului. Astfel, dacă un om (considerat judecător) este în discuție paralelă cu doi interlocutori: un alt om și un calculator, atunci în funcție de întrebările adresate și răspunsurile primite judecătorul determină cine este cu adevărat omul dintre acești doi interlocutori și care ar fi calculatorul. De menționat că Turing nu a specificat exact dacă judecătorul (arbitrul) ar trebui să fie informat, ori nu, despre faptul că unul dintre interlocutori este un calculator.

Testul Turing în prezent este utilizat pe scară largă la diverse concursuri internaționale privind determinarea performanțelor înregistrate de IA. *S-ar putea de evidențiat în acest sens concursul Loebner Prize* care se desfășoară anual și oferă posibilitatea de a realiza în practică Testul Turing. Prima ediție a concursului a avut loc în noiembrie 1991. Scopul concursului respectiv este de a impulsiona cercetările din domeniul IA.

Începând cu anul 2020, mai multe modele lingvistice performante Large Language Model (LLM), cum ar fi de exemplu cel care ține de ChatGPT, au trecut cu brio variante simplificate ale testului Turing.

Reamintim faptul că un model lingvistic performant (LLM) este un model lingvistic antrenat cu învățare automată autosupervizată pe o cantitate imensă de texte, conceput pentru sarcini de procesare a limbajului natural, în special în scopul generării de argumente coerente, logice, clare exprimate într-un limbaj natural. Altfel spus, un model lingvistic enorm (LLM) este un tip de program de inteligență artificială (IA) care, printre numeroase sarcini, poate recunoaște și genera texte. LLM-urile sunt antrenate pe seturi uriașe de date și sunt construite pe rețele neuronale numite modele transformatoare. În termeni mai simpli, un LLM este un program de calculator căruia i s-au administrat suficiente exemple pentru a putea recunoaște și interpreta limbajul uman sau alte tipuri de date complexe. LLM-urile sunt antrenate pe date care au fost colectate inclusiv și de pe internet (milioane de gigaocteți de text) care ulterior sunt aplicate în practică.

Alte teste similare pentru confirmarea IA la nivel uman se referă la:

- **Testul studentului robot.** Robotul - sistemul IA urmează în cadrul unei universități aceleași cursuri universitare ca și un student om și obține o diplomă ca și un licențiat obișnuit.
- **Testul cafelei.** Sistemul IA având acces într-o casă obișnuită are abilitățile și cunoștințele necesare pentru ca să pregătească interlocutorilor prezenți o cafea de calitate.
- **Testul ocupării unui loc de muncă.** Un sistem IA lucrează într-o poziție importantă, în cadrul unei companii publice ori private, și înregistrează performanțe la fel de frumoase ca și omul în poziția respectivă.

Toate testele respective, cu toate avantajele și dezavantajele existente, au fost propuse pentru a ”măsura” inteligența. Chiar dacă până în prezent nu există o opinie unanim acceptată în raport cu acest subiect, cercetătorii din domeniul IA au convenit de comun acord privind criteriile inteligenței care ar trebui să le posedă sistemele IA: *să învețe, să planifice, să aibă cunoștințe comune, să raționeze, să implementeze strategii, să formuleze judecăți, să comunice într-un limbaj natural, să manifeste toate aceste calități în activități* [1-6].

2. Tipuri de inteligență artificială

Însăși termenul de inteligență artificială a fost utilizat în premieră de către informaticianul american John McCarthy în anul 1956 la o conferință științifică desfășurată în cadrul Colegiul Dartmouth (SUA). McCarthy susținea că *”inteligența artificială reprezintă construcția de mașini a căror funcționare poate fi comparată cu manifestările umane de inteligență”*.

Conform definiției date de Parlamentul European, „IA este capacitatea unei mașini de a imita funcții umane, cum ar fi raționamentul, învățarea, planificarea și creativitate” [7].

În contextul zilelor noastre, o bună parte din experții din domeniu IA înclină să considere că: *”Inteligența artificială (IA) este un termen care descrie capacitatea mașinilor, instrumentelor sau aplicațiilor de a prezenta abilitați similare celor umane și care, de-a lungul anilor, au fost considerate exclusive oamenilor. Aceste abilitați includ capacitatea de a raționa, de a învăța, de a planifica, de a se adapta la schimbare, de a deduce și chiar de a gândi creativ”*.

Astfel, IA reprezintă o ramură a informaticii, cu accente profunde în matematică, care se focusează pe studiul comportamentului uman referitor la dezvoltarea de sisteme informatice și programe ce imită modalitățile de raționamente al oamenilor. Din această perspectivă, înțelegem că inteligența artificială este direcționată și ghidată de tehnologii, care se bazează pe un domeniu care se află la intersecția dintre informatică, științele reale, neuroștiință, psihologie și filozofie.

În contextul celor menționate mai sus vom caracteriza succint trei categorii principale ale Inteligenței Artificiale [2, 3, 8].

- **IA îngustă ori slabă (*AI narrow or weak*)**. Se numește IA slabă din perspectiva faptului că nu se ridică la nivelul înțelegerii umane, altfel spus sunt încă la o distanță semnificativă de nivelul rațiunii umane. Sistemele respective realizează sarcini doar în cadrul domeniului pentru care au fost dezvoltate și nu execută sarcini din exteriorul domeniilor pentru care au fost concepute. Sisteme slabe pot să învețe cum să execute doar anumite sarcini specifice și nu mai mult. Aceste, în esență, sunt cauzele pentru care tipul de AI este „îngust”. Printre exemplele de IA îngustă pot fi menționate: chatbotii care pot să răspundă la întrebări de bază ale potențialilor clienți, recunoașterea facială și vocală, organizarea și păstrarea la zi a agendei de lucru etc.
- **IA generală ori puternică (*Strong AI*)**. IA puternică se consideră mult mai flexibilă comparativ cu IA slabă, din perspectiva adaptabilității și capacității de a învăța din experiență și a dezvolta abilități care ar permite să execute un set mai extins de sarcini, care au ori nu conexiuni între ele. IA generală, dispunând de un intelect flexibil, ar avea potențialul să execute cu succes orice sarcină intelectuală pe care un om obișnuit ar putea să o îndeplinească, uneori poate chiar mai bine decât ar în stare un om. Tehnologiile care ar fi în stare să dezvolte Inteligența Artificială generală nu există în acest moment. Experții consideră că IA generală va fi dezvoltată în următorii 10-20 de ani.
- **IA superinteligentă (*Super intelligent AI*)**. IA superinteligentă se caracterizează prin faptul că este complet conștientă de sine și depășește semnificativ inteligența umană. Sistemele respective vor avea capacitatea de a perfecționa și a îmbunătăți în permanent propriile decizii, în raport cu o problemă ori alta, fiind cu mult mai eficiente și mai raționale comparativ cu deciziile generate de inteligența umană. Dotată cu o putere analitică excepțională IA superinteligentă ar putea depăși capacitățile logice umane, influențând considerabil cursul de dezvoltare a speciei umane.

3. Cum învață un sistem IA lucruri noi?

Există la moment câteva metode fundamentale prin intermediul cărora IA învață lucruri noi. Astfel, [8]:

- **Învățarea automată (*Machine Learning*)**. Învățarea automată reprezintă o modalitate de învățare-cercetare, prin intermediul calculatoarelor, fără programare specifică, prelucrează o cantitate uriașă de date și pe care le analizează și le structurează, și în baza rezultatelor obținute reacționează la sarcinile stabilite. Astfel, ML poate învăța și îmbunătăți din prelucrarea unor massive mari de date și experiența acumulată, fără a fi programată nemijlocit pentru a executa aceste sarcini. Algoritmii ML sunt elaborați în așa fel încât, prelucrând informația primită, să poată lua decizii în mod autonom, bazându-se

pe datele obținute. În calitate de exemplu ML, pot fi asistenții virtuali care pot înțelege comenzile vocale.

- *Rețelele neurale (Neural Networks)*. Rețelele neurale reprezintă esența Inteligenței Artificiale și sunt fundamentale pentru învățare automată. Rețele neurale reprezintă modele de calcul cu mai multe straturi care dispun de noduri clasificate analog ca neuronii dintr-un creier biologic. Din această perspectivă, algoritmi pentru rețele neurale sunt elaborați pentru a găsi soluții, recunoscând tipare, făcând predicții și luând decizii în mod autonom, bazându-se pe datele obținute. Astfel, inspirate de rețelele neurale biologice, rețele interconectate de algoritmi fac schimb de date și pot fi programate pentru a îndeplini anumite sarcini într-un mod complex care încearcă să imită gândirea omenească. Sisteme respective învață să îndeplinească obiective și procese analizând exemplele pe care le primesc din exterior, fără ca să fie programate și să ducă la bun sfârșit o sarcină anume. Rețelele neuronale (NN) au găsit aplicații în diverse domenii, cum ar fi recunoașterea imaginii și a vorbirii, prelucrarea limbajului natural, modelarea, vehicule autonome și multe altele

- *Învățarea profundă (Deep Learning)*. Învățarea profundă este o metodă de învățare automată mult mai aprofundată, prin intermediul căreia calculatoarele învață să facă lucruri într-un fel foarte apropiat de cel uman: să învețe din experiență. Învățarea profundă este o subcategorie a învățării automate care utilizează rețele neuronale multistratificate, numite rețele neuronale profunde, pentru a simula puterea decizională complexă a creierului uman. Diferența semnificativă dintre învățarea profundă și învățarea automată este structura arhitecturii rețelei neuronale subiacente. Modelele de învățare profundă utilizează ca regulă sute sau mii de straturi pentru a antrena modelele, pe când cele tradiționale de învățare automată „simplă” utilizează rețele neuronale simple cu unul sau două straturi de calcul. Învățarea profundă este tehnologia-cheie din spatele autoturismelor autonome și ceea ce le permite să facă diferența dintre un pieton sau un semn de circulație. Pe scurt, DL permite unui calculator să învețe direct din sunete, texte și imagini.

- *Inteligența Artificială Generativă (Generative AI)*. Inteligența Artificială Generativă (GAI) reprezintă un tip de învățare Deep Learning care utilizează modele LLM pentru a genera, în baza datelor lor de instruire, conținuturi complet noi: texte, imagini, sunete, videoclipuri, coduri software. Multe întreprinderi cât și consumatorii, chiar dacă nu au posibilități și capacități pentru a programa anumite procese, utilizează IA generativă pentru a executa sarcinile stabilite, folosind limbajul natural, și rezultatele obținute de GAI în multe cazuri sunt excepționale.

4. Aplicarea sistemelor de IA în procesul de studiere a matematicii

Aplicarea IA în sistemul educațional, inclusiv în procesul de studiere a matematicii cu siguranță aduce multe beneficii semnificative. În prezent, utilizând pe larg la dezvoltarea

diverselor sisteme IA, așa concepte care țin de învățarea automată, învățarea profundă, rețelele neuronale, a devenit posibilă construcția unor sisteme inteligente care au potențialul să soluționeze probleme cu un grad avansat de dificultate la matematică. Mai mult chiar, sistemele IA sunt utilizate pentru verificarea ori chiar pentru demonstrația teoremelor din matematică. În prezent, datorită posibilității de a examina pe larg cantități mari de date, se cunosc rezultatele pozitive la aplicarea sistemelor de IA în matematica financiară ori la prognozarea tendințelor pieții. Prin intermediul metodelor de învățare automată, pot fi generate modele utilizate la rezolvarea problemelor matematice cu un grad avansat de dificultate. De exemplu, utilizarea rețelelor neuronale pentru generarea structurilor algebrice neasociative care satisfac anumite proprietăți algebrice ori aproximarea funcțiilor complexe. Sisteme de IA, interactive pe platforme on line, sunt deja folosite pe larg utilizate la studierea matematicii în licee și universități. În așa mod, conceptele matematice complexe sunt mai ușor înțelese de către studenți. Să examinăm unele beneficii educaționale în acest sens:

- A) **Generarea de demonstrații matematice.** Unele sisteme IA sunt utilizate pentru a livra demonstrații formale noi pentru diverse teoreme din diferite compartimente ale matematicii. În acest sens, munca matematicienilor devine mai puțin complicată pe anumite segmente de cercetare ori studiu.
- B) **Automatizarea cercetărilor matematice.** Sisteme IA, precum de exemplu Open AI, permit automatizarea unor aspecte ale cercetării matematice. Utilizând metodele de învățare automată examinează cantități mari de date din publicații matematice și pot livra rezultate noi, ori chiar idei teoretice noi pentru diverse compartimente din matematică.
- C) **Rezolvarea problemelor matematice.** În prezent există pe piață diverse sisteme de IA concepute pentru soluționarea problemelor la diferite compartimente din matematică atât pentru studenți cât și pentru profesioniști. Evidențiem în acest sens următoarele sisteme IA: *Julius AI*, *Socratic*, *Photomath*, *Mathos AI*, *Gauthmath*, *Geogebra*, *Mathway*, *MathPapa*, etc. Sistemele IA sunt utilizate atât de elevi/studenți și profesori pentru aprofundarea unor concepte matematice, exersarea la soluționarea unor tipuri de probleme care țin de anumite compartimente din matematică, înțelegerea pas cu pas rezolvarea unor probleme ori demonstrația unor teoreme, găsirea unor soluții alternative la problemele examinate etc. Vom evidenția mai jos unele caracteristici semnificative ale sistemelor de IA utilizate în prezent la studierea matematicii:
 - *Oferă soluții exacte și fiabile.* Livrează soluții exacte și fiabile în procesul de rezolvare la diferite subiecte matematice: algebră, geometrie, trigonometrie, analiza matematică, etc;

- *Explicații detaliate, pas cu pas.* Oferă explicații pas cu pas la rezolvarea unor probleme pentru ca utilizatorii să înțeleagă fiecare soluție;
- *Rezolvă probleme descrise prin cuvinte.* Rezolvă probleme de matematică exprimate prin texte, livrând concomitent și explicații;
- *Soluționează probleme recepționate prin fotografii.* Studenții realizează o fotografie care conține condiția problemei și sistemul IA oferă soluția pas cu pas.
- *Poate să ofere ghiduri de studii.* Unele sisteme IA pot să livreze ghiduri de studii atractive respectând în același timp și standardele educaționale solicitate.
- *Oferă experiență de studiu personalizată.* Înțelegând stilul de învățare a fiecărui student își adaptează recomandările de conținut în funcție de nivelul studentului/elevului.
- *Sistemele IA acoperă din punct de vedere academic disciplinele STEM.* În multe cazuri, aplicațiile oferă consultanță pentru studiu diverselor discipline STEM (biologie, chimie, fizică etc) și evidențiază conexiunile între ele.

5. Modele de probleme rezolvate de sisteme IA

Mai jos vom examina trei tipuri de probleme cu un nivel de dificultate peste medie, examinate la diverse concursuri școlare, care au fost propuse pentru rezolvare sistemelor de inteligență artificială Julius AI și Mathos AI. Luând în considerare că soluțiile identificate de Julius AI și Mathos AI pentru Problemele 2 și 3 depășeau volumul a două pagini vom prezenta în lucrare numai soluția găsită pentru Problema 1.

Problema 1. Școala are nevoie de N bănci noi. Trei fabrici de mobilă au primit o comandă pentru producția lor. Prima fabrică poate produce n bănci în trei zile, a doua fabrică poate produce $p\%$ din cantitatea pe care prima și a treia fabrică o produc în două zile. A treia fabrică produce m bănci în 5 zile. Câte zile va dura finalizarea comenzii? Rotunjește rezultatul obținut la cel mai apropiat număr întreg.

Soluția: Soluția propusă de sistemul Julius AI. Timp de rezolvare: aproximativ 1 minut.

Let's walk through it step by step and keep everything clear and simple. What we're given.

- Factory 1 makes n desks in 3 days.
- Factory 3 makes m desks in 5 days.
- Factory 2 makes, in 4 days, $p\%$ of what Factories 1 and 3 together would make in 2 days.
- The school needs N desks total.
- We want the total time (in days) to finish N desks if all three factories work together. Then we round up to the nearest whole day.

Step 1: Convert each factory's production to a daily rate

• Factory 1 rate: $r_1 = n/3$ desks per day. • Factory 3 rate: $r_3 = m/5$ desks per day.
Step 2: Understand Factory 2's description
• First find how much Factories 1 and 3 together produce in 2 days: • In 2 days, Factory 1 makes $2 \cdot (n/3)$ • In 2 days, Factory 3 makes $2 \cdot (m/5)$ • Total in 2 days together: $2(n/3 + m/5)$ • Factory 2, in 4 days, produces $p\%$ of that amount: • Production in 4 days by Factory 2 = $(p/100) \cdot 2(n/3 + m/5)$ • Therefore, Factory 2's daily rate is that divided by 4: • $r_2 = [(p/100) \cdot 2(n/3 + m/5)] / 4 = (p/200)(n/3 + m/5)$
Step 3: Combine the daily rates
• Total daily rate R when all three work together: • $R = r_1 + r_2 + r_3$ • $R = n/3 + m/5 + (p/200)(n/3 + m/5)$ • Factor the common term $(n/3 + m/5)$: • $R = (n/3 + m/5) \cdot (1 + p/200)$
Step 4: Compute the time to make N desks
• Time T (in days) = total work / rate = N / R • Substitute R: • $T = N / [(n/3 + m/5) \cdot (1 + p/200)]$
Step 5: Round up to a whole number of days
• Final answer: • $T = \text{ceil} (N / [(n/3 + m/5) \cdot (1 + p/200)])$
Notes:
• $\text{ceil}(x)$ means round x up to the nearest integer. • This formula assumes all factories work simultaneously at constant rates.

Posibile date de intrare:

$$N = 600, 650, 700; n = 15, 20, 25; m = 35, 40, 45, 50; p = 20, 25, \dots, 80.$$

Problema 2. Găsiți toate perechile de numere prime (p, q) pentru care numărul $p^2 + 5pq + 4q^2$ este un pătrat perfect.

Rezolvare. Timp de rezolvare: aproximativ 1 minut.

Răspunsul găsit de sistemul **Gauthmath**: $(p, q) \in \{(13, 3), (7, 5)\}$

Răspunsul corect oferit de sistemul **Mathos AI**: $(p, q) \in \{(13, 3), (5, 11), (7, 5)\}$.

Verificarea efectuată de **Mathos AI**:

1. For $(13,3)$: $13^2 + 5 \cdot 13 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 = 169 + 195 + 36 = 400 = 20^2$.
2. For $(5,11)$: $5^2 + 5 \cdot 5 \cdot 11 + 4 \cdot 11^2 = 25 + 275 + 484 = 784 = 28^2$.

3. For (7, 5): $7^2 + 5 \cdot 7 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 = 49 + 175 + 100 = 324 = 18^2$.

Problema 3. *Doi pietoni, aflați inițial la o distanță de 20 km unul de celălalt, se mișcă cu viteze constante în direcțiile lor rectilinii fixe. La câte minute după momentul inițial de timp va fi distanța minimă dintre ei dacă se știe că la 35 de minute de la început distanța dintre ei era de 15 km, iar după altele 20 de minute distanța era deja de 13 km? Găsiți această distanță.*

Rezolvare. Timp de rezolvare: aproximativ 1 minut.

Răspunsul corect oferit de **Mathos AI**: Therefore, the distance between the pedestrians is minimal 80 minutes after the start and that minimal distance is 12 km (Distanța minimă dintre pietoni va fi de 12 kilometri la 80 de minute de la momentul inițial).

Concluzii

Sistemele IA înregistrează performanțe extraordinare care țin de rezolvare și explicarea problemelor de matematică. Pentru sistemele IA existente, destinate pentru studiul matematicii, inclusiv cele menționate mai sus, practic nu există probleme de matematică din cursul liceal ori universitar care nu ar putea fi rezolvate și lămurite pas cu pas. În contextul dat rămân însă deschise o serie de probleme de ordin pedagogic, psihologic, didactic și moral.

1. Ar trebui sistemele IA existente incluse în procesul didactic de studiere a matematicii și a disciplinelor STEM? Dacă da, în ce măsură ar trebui introduse și când ar trebui folosite mai intens de elevi/studenți? Cum ar trebui personalizată educația matematică în acest sens?
2. Cunosce profesorii de liceu și cei universitari cum ar trebui să organizeze procesul didactic astfel, încât forța acestor sisteme IA din domeniul matematicii să fie orientată spre creșterea nivelului de cunoștințe și abilitățile de rezolvare a problemelor a elevilor/studenților și nu în defavoare lor?
3. Performanțele înregistrate de sistemele IA în domeniul de rezolvare a problemelor de matematică sunt incredibile. Cum s-ar putea de predispus elevii/studenții să nu utilizeze aceste sisteme IA la pregătirea temelor pentru acasă, atunci când se cere ca ei să lucreze individual?
4. Majoritatea sistemelor IA din domeniul matematicii care înregistrează performanțe semnificative sunt cu plată. În ce măsură și în ce mod pot fi implicați în procesul didactic și elevii/studenții care nu au posibilitate să achite serviciile respective?
5. Cât de mare este riscul că o parte din elevii/studenții implicați în procesul de studiere (rezolvare) a diferitor compartimente (probleme) de matematică prin intermediul

sistemelor IA vor refuza ulterior categoric să studieze de sinestător matematica prin intermediul metodelor clasice, motivând că abordările respective sunt plictisitoare?

În așa mod, nu este exclus faptul că va fi generată o intoleranță vădită în raport cu abordările pedagogice clasice (teme individuale pentru acasă, teste individuale, lucrul cu cartea de matematică etc) privind studierea științelor reale. Motivația fiind următoare: „Dacă sistemul IA poate să rezolve de ce ar trebui să muncesc și eu pe acest subiect”? Prin această prismă de idei este firesc să ne întrebăm: Există oare amenințarea ca atractivitatea căilor/metodelor ușoare și simple, prin implicarea directă a sistemelor IA, de a rezolva probleme de matematică vor rămâne determinante, decisive în activitatea de cunoaștere a elevilor/studentilor, ultimii în mare parte vor rămâne demotivați și nu vor dori să depună eforturi proprii pentru ași îmbunătăți performanțele academice?

În contextul celor punctate mai sus considerăm că rolul profesorului de matematică devine și mai important. Sistemele IA ar trebui să faciliteze și să completeze activitatea profesorului de matematică. Cum ar trebui în acest sens să interacționeze *profesorul-elevul/studentul-sisteme IA*? Întrebările respective, cât și multe altele, vor fi la ordinea zilei în procesul de studiere a matematicii încă mulți ani. În schimb, considerăm noi, identificarea soluțiilor eficiente la problemele formulate mai sus va fi un proces continuu, cu multe necunoscute și provocări interesante.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024

Bibliografie

1. Agenția pentru Drepturi Fundamentale a Uniunii Europene. Despre Inteligența Artificială și BigData. <https://fra.europa.eu/en/themes/artificial-intelligence-and-big-data>.
2. HOLLEY, P. (28 ianuarie 2015). „*Bill Gates on dangers of artificial intelligence: 'I don't understand why some people are not concerned'*”. The Washington Post. [ISSN 0190-8286](https://www.washingtonpost.com/news/technology/wp/2015/01/28/bill-gates-on-dangers-of-artificial-intelligence-i-dont-understand-why-some-people-are-not-concerned/). Arhivat din [original](#) la 30 octombrie 2015.
3. GIBBS, S. (27 octombrie 2014). „*Elon Musk: artificial intelligence is our biggest existential threat*”. The Guardian. Arhivat din [original](#) la 30 octombrie 2015.
4. A report by Royal Society, April 2017, “Machine learning: the power and promise of computers that learn by example”, ISBN: 978-1-78252-259-1 and Information Technologies, Vol. 7 (3), 2016, 11741179
5. LARSON, E. J. (2021) *The Myth of Artificial Intelligence. Why Computers Can't Think the Way We Do*, Harvard University Press, Cambridge.

6. SANDHYA, N., CHARANJEET KAUR, R. A review on Machine Learning Techniques. In: *International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication (IJRITCC)*, March 16 Volume 4 Issue 3, ISSN: 2321-8169, pp. 395 – 399.
7. Inteligența artificială (IA) este considerată o „tehnologie determinantă a viitorului”. Ce este exact IA și cum ne afectează deja viața? <https://www.europarl.europa.eu/topics/ro/article/20200827STO85804/ce-este-inteligenta-artificiala-si-cum-este-utilizata>.
8. CHIRIAC, L., CHIRIAC, E., LUPAȘCO, N., PAVEL, M. Paradigme moderne în dezvoltarea și învățarea inteligenței artificiale. In: *Proceedings of the 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics, Education CAIM 2022*. Chisinau, Moldova, August 25-27, 2022, UST, pp. 116-124.

UDC: 37.02:004.9:51

TEACHING MATHEMATICS WITH DIGITAL TEXTBOOKS: GLOBAL PERSPECTIVE AND IMPLEMENTATION CHALLENGES

Tatiana CHIRIAC, PhD, associate professor

<https://orcid.org/0000-0002-6122-1937>

email: chiriac.tatiana@upsc.md

Department of Informatics and Information Technologies,
„Ion Creangă” State Pedagogical University of Chişinău, Republic of Moldova

Abstract. This paper analyses the potential of digital mathematics textbooks (DMTs) as interactive, adaptive instruments that support innovative teaching, individualised learning and stimulate motivation. Research indicates a positive impact on student motivation and achievement, especially when used alongside specialised digital resources and platforms. The implementation of DMTs varies across EU countries, reflecting differences in infrastructure, policy frameworks, and teacher support. Effective integration of digital textbooks requires technological readiness, institutional support, and continuous professional development for teachers. Further research is essential to understand the pedagogical benefits of DMTs in diverse educational contexts.

Keywords: digital mathematics textbooks (DMTs), digital transformation, interactive and adaptive learning.

PREDAREA MATEMATICII PRIN INTERMEDIUL MANUALELOR DIGITALE: PERSPECTIVE GLOBALE ŞI PROVOCĂRI ALE IMPLEMENTĂRII

Rezumat. În acest lucrare se analizează potenţialul manualelor digitale de matematică (MDM) ca instrumente interactive şi adaptive care susţin, predarea inovativă, instruirea diferenţiată şi motivează studenţii să înveţe. Cercetările indică un impact pozitiv asupra motivaţiei şi performanţelor elevilor, în special atunci când sunt utilizate alături de resurse şi platforme digitale specializate. Implementarea TMD-urilor variază în diferite ţări ale UE, reflectând diferenţele în ceea ce priveşte infrastructura, cadrele de politici şi sprijinul acordat profesorilor. Integrarea eficientă a manualelor digitale necesită pregătire tehnologică, sprijin instituţional şi dezvoltare profesională continuă pentru profesori. Cercetări suplimentare sunt esenţiale pentru a înţelege beneficiile pedagogice ale TMD-urilor în contexte educaţionale diverse.

Cuvinte cheie: manuale digitale de matematică (MDM), transformare digitală, învăţare interactivă şi adaptivă.

1. Introduction

The rapid digital transformation of education requires rethinking how teaching materials, particularly textbooks, are designed and used. In this evolving perspective, digital mathematics textbooks (DMTs) have become one of the most promising tools for integrating technology into effective instruction. Compared to standard printed books, digital mathematics textbooks offer a richer, multi-modal learning experience. They often

include components such as interactive exercises, visual simulations and modelling, explanatory videos, real-time feedback tools, and pathways that can be adapted to students' individual progress (Johansson et al., 2024; Wirth & Greefrath, 2024) [1, 2]. It is expected that these improvements would result in a more dynamic, individualised, and student performance-based mathematics learning experience. To effectively encourage students' analytical thinking in mathematics, teachers should plan their lessons around clear objectives that are based on curriculum standards and consider different learning styles (Dani, A. & Ashok, D., 2025) [3].

Recent studies highlight that digital mathematics textbooks differ fundamentally from traditional ones by integrating dynamic characteristics that communicate content and actively design the instructional process. According to Hoch, Reinhold, Werner et al. (2020) [4], to fully benefit from the digital format, math e-textbooks should embed interactive randomised exercises and problems, adaptive levels of difficulty, and automated feedback. In such a way, students interact more deeply with mathematical content, personalise their learning pace, and receive guidance tailored to their needs. Additionally, DMTs can provide instant, task-specific feedback. For that reason, DMTs move beyond their traditional role as static sources of information, becoming effective teaching resources that support individualised learning and stimulate motivation.

Furthermore, mathematical understanding can be significantly enriched through digital tools like *GeoGebra*, *Desmos*, or *Mathway*, which facilitate dynamic modelling, geometric visualisation, and exploratory learning. As Brnić and Greefrath (2020) [5] observe, such tools help bridge abstract mathematical concepts and tangible visual representations, supporting deeper cognitive processing. At the same time, interactive elements not only transform the textbook from a static medium into an adaptive learning environment but also enable more differentiated instruction and promote student engagement. Therefore, digital textbooks are no longer simply carriers of content but dynamic instructional tools that contribute to formative assessment and real-time support in math instruction.

The positive effects of digital resources on mathematical achievements have been demonstrated by a growing amount of empirical and meta-analytic research. For example, in their study, Knight, B.A., Casey, M. and Dekkers, J. (2017) [6] found that students reported feeling both empowered and supported when using e-textbooks in mathematics classes, especially because they could adjust the learning pace according to their readiness. Students' opinions about e-textbooks had been mostly favourable, describing them as modern, captivating resources that improve education. Another example, a meta-analysis by Wijaya et al. (2022) [7] synthesised data from 17 trials with 26 effect sizes and more than 3,000 participants and discovered that digital mathematics textbooks significantly enhanced students' mathematical achievement (Hedges' $g=0.82$). The greatest

improvements were observed among preschool learners within short-term interventions involving small groups, regardless of whether the e-textbooks were interactive or not.

Digital mathematics textbooks represent an important step forward in rethinking instructional design. Accordingly, as digital education continues to expand, further research is essential to unlock the pedagogical potential of DMTs across diverse teaching contexts.

2. Towards a Digital Ecosystem for Mathematics Education

As interactive multimedia educational resources gained popularity and information and communication technologies were incorporated into the classroom, digital textbooks experienced a major change and became widely used in developed countries over the past two decades. Numerous educational strategies, ranging from national digitalisation programs to European initiatives focused on enhancing learning outcomes through technology, have contributed to the widespread adoption of digital textbooks.

The *Digital Education Action Plan 2021–2027* (European Commission, 2020) [8] serves as a basis for European initiatives that underline the importance of “unlocking the potential of digital technologies for education and promoting digital skills for all”. This strategic document encourages national efforts aimed at ensuring the availability of high-quality digital educational content. *The Council Recommendation on Digital Education* (European Commission, 2023) [9] is another important document that emphasises the significance of creating curriculum materials. It promotes the development and use of digital educational content, such as interactive resources and digital textbooks, and aims to create an efficient digital education ecosystem across all EU member states.

In alignment with EU strategic policies, the Republic of Moldova adopted national frameworks and action plans, primarily the *Digital Transformation Strategy 2023–2030* [10] and the *Education 2030 Development Strategy* (2023) [11], which focus on promoting digital technologies in education, supporting the use of digital educational resources, and developing digital competencies among teachers and students. These national efforts highlight that the integration of digital textbooks into teaching practices represents a strategic approach to ensure equitable access to quality education, improve learning outcomes, and promote innovation in the classroom.

An initial step in analysing the use of digital mathematics textbooks within European education systems is to define the concept of a digital textbook and to clarify its potential in supporting differentiated instruction. According to the *Top Hat* glossary, a digital textbook is “an electronic version of a printed textbook. Digital textbooks are used in college as a supplement to lectures, labs and tutorials. [...]”. This description also includes associated terms such as “interactive textbooks” and “dynamic textbooks”, drawing our attention to their enhanced functionality compared to traditional formats. “An interactive

textbook is an electronic textbook that can be customized with media, audio, discussion questions and additional interactive elements that keep students engaged”.

Based on our previous findings (Balmuş, N. & Chiriac, T., 2022 [12]; Sîrghi, O. & Chiriac, T., 2023 [13]), we argue that interactive resources foster deeper conceptual understanding by enabling students to engage actively with mathematical content. Moreover, the exploration of complex ideas through dynamic visualisations, virtual modelling, and interactive components creates opportunities for instructional differentiation, allowing teachers to better address diverse learners’ needs. Beyond their functional role, such resources require the adoption of new methodological approaches adapted to the digital environment. Their interactive design significantly impacts how students understand the content, providing more individualised and engaging learning experiences.

Digital mathematics textbooks have a lot of potential, although their true impact depends on how efficiently they are designed. Thus, one of the most considerable challenges lies in the pedagogical design of DMTs. From a socio-cultural perspective, Rezat and Strässer (2012) [14] note that educational artefacts such as textbooks and digital technologies play a fundamental role in shaping the didactical procedure. They propose extending the classic teacher-student-content model into a “socio-didactical tetrahedron” incorporating tools and representations as core elements (figure 1). This model reflects the idea that mathematics education is inherently mediated by both material and symbolic artefacts, where artefacts play an active role in shaping instructional dynamics.

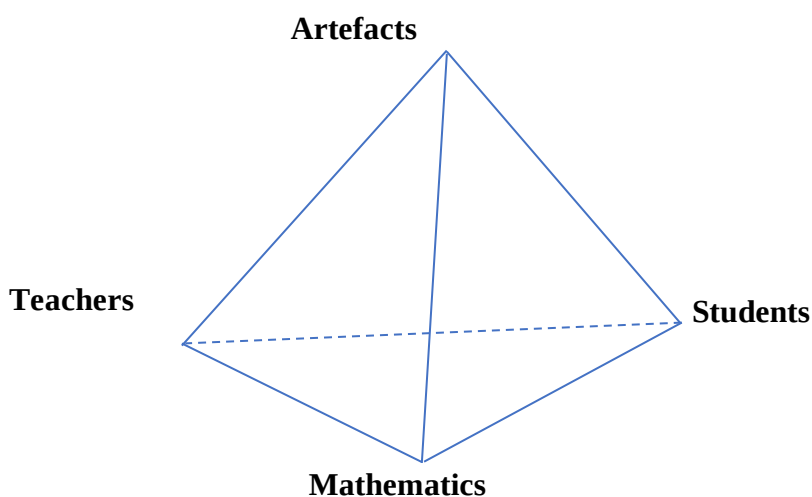


Figure 1. The socio-didactical tetrahedron model

[adapted from Rezat and Strässer (2012)]

Another notable aspect is the critical role of teachers in the digital transformation process. Effective implementation of digital textbooks depends not only on technological infrastructure but also on teachers’ active engagement in collaborative problem-solving

within educational ecosystems (based on collaboration between the stakeholders – school leaders, teachers, parents, and other stakeholders). In this connection, Modén (2021) [15] states the use of digital resources generates conflicts and tensions within traditional didactic activities, particularly when digital textbooks are substituted for traditional instruments like printed textbooks. All of these contradictions should be regarded as opportunities for professional development and innovative teaching, even if they are frequently recognised as difficulties. However, addressing them requires collaborative reflection and institutional support, enabling teachers to revise their teaching methods, engage in continuous professional development, and explore new strategies for integrating digital tools in the curriculum.

These findings emphasise the indispensable role of teachers in shaping the digital transformation of education. In order to exploit the full potential of digital resources and promote meaningful learning, it is crucial that teachers develop a deep understanding of this transformation and are sufficiently prepared to manage its challenges.

The implementation of digital textbooks varies across EU member states, reflecting differences in national policies, infrastructure, and pedagogical priorities. According to the OECD's comparative research (2023, p. 21) [16], important differences exist between EU countries in developing digital education ecosystems, with many still facing challenges related to “access, data interoperability, and teacher support”. The creation of institutional structures such as “innovation labs” is seen as crucial for the effective and responsible integration of digital resources, including interactive textbooks. It is important to consider the integration of e-math textbooks as a part of a larger digital transition requiring coordinated action across policy, infrastructure, and pedagogy.

The study undertaken by the OECD (2023, p. 143) [ib.] also notes, that although digital textbooks are widely available in many countries, their procurement and integration into educational systems differ substantially. In some countries, such as Hungary and Turkey, digital textbooks are produced and distributed by government agencies. Similarly, in Denmark, Finland, and Sweden, textbook procurement – including digital ones – is the responsibility of the relevant sub-governmental authorities. In contrast, in countries like Estonia, Austria, and Japan, private publishers develop both digital and physical textbooks, which must satisfy legal and education quality standards.

3. Case Studies and National Experiences

3.1. Romania

Romania has made significant progress in the development and implementation of digital textbooks. However, this process continues to be marked by multiple challenges. Compared to other countries, the Romanian Ministry of Education establishes the curricular framework, coordinates tender procedures, and approves textbooks, while the

production is delegated to private publishers. In such way, printed or digital textbooks developed by publishing houses in Romania must comply with the technical and pedagogical requirements imposed by the Ministry of Education (<https://www.edu.ro/manuale-scolare>). In practice, digital textbooks are often expanded and enhanced versions of printed textbooks, delivered in formats accessible to students and teachers via official platforms or publishers' own websites.

The most significant Romanian publishing houses that have digitised textbooks and educational resources are listed below:

- *Intuitext* (<https://www.intuitext.ro/>), is an education company within the Softwin group and one of the most innovative international producers of computer lessons. It is specialised in interactive educational resources and create digital textbooks for several subjects (mathematics, science, Romanian language).

- *Art Digital* (<https://manualedigitaleart.ro/>), is the part of the Art Editorial Group, that promotes quality in education by publishing digital textbooks and auxiliary resources in accordance with the requirements of the Ministry of Education. Its officially approved textbooks can be accessed and used for free, along with various complementary educational materials, available on the publishing house's own platforms. It publishes for several subjects, including foreign languages, history, mathematics, science.

- *CD Press* (<https://cdpress.ro/>), is a publishing house specialised in textbooks and teaching aids that participated in the tenders organized by the Ministry of Education for digital textbooks. Its digital textbooks can be accessed through the <https://clasadigitala.ro/> platform.

- *Corint Educational* (<https://edituracorint.ro/educational/manuale-si-auxiliare/manuale.html>), is a part of the Corint Editorial Group that has digitised textbooks for various subjects, including mathematics.

The level of interactivity (including media files, animations, exercises and other features) and visual quality of the digital textbooks vary between publishing houses. We believe that, while the Ministry of Education of Romania has taken significant steps to promote digital textbooks, there is still a necessity to develop an integrated national platform with interactive capabilities, as well as ongoing support for teachers' professional development, to ensure widespread and effective use of digital resources in schools.

3.2. Estonia

Estonia is widely recognised as a leading example in the digitalisation of education, particularly in the development and implementation of digital textbooks. As reported by the OECD (2023, p.143) [ib.], digital and physical textbooks are developed by private vendors in Estonia. This represents a centralized model governed by national standards and established by the Ministry of Education and Research. The most relevant platforms are:

– *e-koolikott* (<https://e-koolikott.ee/et>) – a repository and search engine for educational materials, supported by Ministry of Education and Research (<https://hm.ee/en/>). The platform offers a wide range of content including e-textbooks, exercises, worksheets, presentations, videos, tests, and other teaching resources (figure 2).

– *Opiq* (<https://www.opiq.ee/>) – a cloud-based learning environment that offers fully digital textbooks from Estonian leading educational publishers.

In addition, Estonia provides both open and restricted access resources for teacher professional development. These platforms typically provide two types of materials: general education resources and materials aimed at enhancing teachers' digital competences (e.g., through the Education and Youth Board – *Haridus- ja Noorteamet* (<https://harno.ee/en/>)).

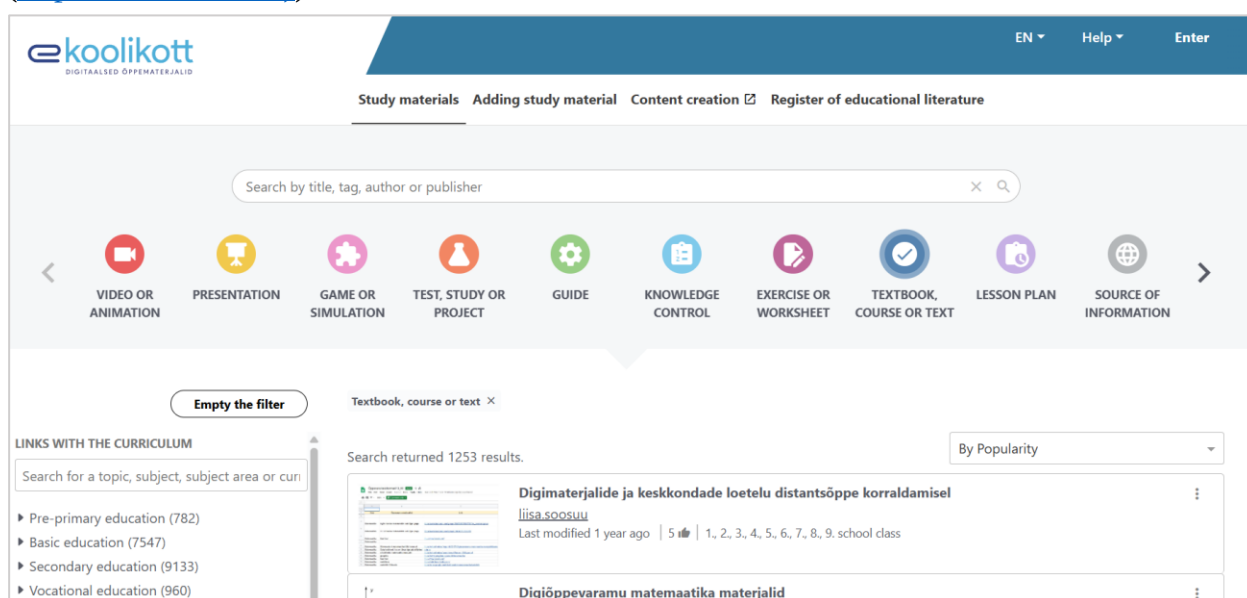


Figure 2. Digital repository *e-koolikott*, Estonia

[source: <https://e-koolikott.ee/en/>]

3.3. Finland

Interactive digital textbooks have been adopted and used in several OECD countries, such as Finland, Korea, and the United States, based on the OECD (2023, p. 144) [ib.]. In Finland, educational publishers like *Sanoma Pro* (sanomapro.fi) and *Otava Oppimisen Palvelut* (oppiminen.otava.fi) offer a wide array of digital learning materials for all subjects, including interactive digital textbooks enhanced with features like videos, animations, self-assessments, and interactive exercises that complement the Finnish curriculum.

3.4. Hungary

Hungary's approach to developing digital learning resources and content is marked by strong state control, with the Educational Authority acting as the primary textbook publisher (OECD, 2023, p. 144) [ib.]. While this centralisation offers benefits in terms of curricular coherence and equitable access, it may also limit the development of alternative

pedagogical approaches. In this context, the contribution of *Mozaik Education* platform (<https://www.mozaweb.hu/>) becomes particularly significant. As a key leading educational company in Hungary's EdTech sector and a recognised name on the international stage, the company operates outside the state-controlled textbook system. *Mozaik* has successfully developed a robust digital ecosystem (covering subjects like biology, chemistry, physics, mathematics etc.) that is now widely used in schools, both within Hungary and abroad.

3.5. France

In France, the development of digital textbooks is driven by both collaborative and commercial initiatives. [Lelivrescolaire.fr](https://www.livrescolaire.fr/) exemplifies an integrated and participatory publishing model, involving teachers in the creation of innovative digital content. Projects such as *Sésamath* (open-source mathematics resources) and *M@ths en-vie* (real-world problem-solving tasks in digital format) illustrate how teachers lead the development of accessible, practice-orientated materials. In parallel, commercial publishers such as [Hachette Éducation](https://www.hachette-education.com/) offer fully interactive digital textbooks, enriched with videos, quizzes, mobile access, and offline functionality, combining technological innovation with pedagogical support.

4. Conclusion

Referring to international research, this paper highlights both the significant potential and the notable challenges of the digital transformation of mathematics textbooks in education. A review of numerous studies indicates that DMTs represent a powerful yet complex educational innovation. However, their effectiveness depends not only on technological availability but also on pedagogical alignment, teacher readiness, and systemic support. Successful adoption of digital textbooks in education requires teachers to know how to integrate them meaningfully into instruction. Additionally, it demands high-quality content, sustained professional development, and strategies that balance innovation with educational purpose. The diversity of approaches across EU countries reflects experimentation with both centralised and decentralised digitalisation models. An important consideration is that DMTs should be developed to align with national education standards, linguistic diversity, and cultural contexts.

Acknowledgement

The analysis is conducted within the framework of the national research project “Innovation in the Design and Implementation of Interactive Digital Math Textbooks for Lower Secondary Education”, Strategic Priority IV: Societal Challenges, Strategic Direction: Innovative Educational Technologies and Products, registered in the State Register of Projects in the Sphere of Science and Innovation of the Republic of Moldova under the number 25.80012.0807.42SE.

Bibliography

1. JOHANSSON, H.; WESTMAN, A.-K.; NORBERG, M.; ELIASSON, N. Teachers' use of digital textbooks in mathematics and science education. In: *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 2024. vol. 12(3):10. DOI: <https://doi.org/10.31129/LUMAT.12.3.2455>. Available: <https://journals.helsinki.fi/lumat/article/view/2455/2027>.
2. WIRTH, L., GREEFRATH, G. Working with an instructional video on mathematical modeling: upper-secondary students' perceived advantages and challenges. In: *ZDM: the international journal on mathematics education*. 2024. vol. 56, pp. 573-587 10.1007/s11858-024-01546-2. Available: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-024-01546-2>.
3. DANI, A., ASHOK, D. Exploring the Impact of DESMOS on Students' Understanding and Learning of Transformations. In: *Proceedings of the HCT International General Education Conference (HCTIGEC 2024)*, 2025. At: Dubai, United Arab Emirates. Available: https://www.researchgate.net/publication/389400867_Exploring_the_Impact_of_DESMOS_on_Students'_Understanding_and_Learning_of_Transformations
4. HOCH, S., REINHOLD, F., WERNER, B. et al. Design and research potential of interactive textbooks: the case of fractions. In: *ZDM Mathematics Education*, 2018. vol. 50, pp. 839–848. Available: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-018-0971-z#citeas>.
5. BRNIC, M., GREEFRATH, G. Learning mathematics with a digital textbook and its integrated digital tools: the KomNetMath project. In: *14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching - ICTMT 14*. At: Essen: 2020. DOI: 10.17185/dupublico/70736. Available: https://www.researchgate.net/publication/346106415_Learning_mathematics_with_a_digital_textbook_and_its_integrated_digital_tools_the_KomNetMath_project.
6. KNIGHT, B.A., CASEY, M., DEKKERS, J. Using electronic textbooks to teach mathematics in the secondary classroom: What do the students say? In: *International Journal of Education and Development using Information and Communication Technology (IJEDICT)*, 2017. vol. 13, issue 1, pp. 87-102. Available: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1142271.pdf>.
7. WIJAYA, T., CAO, Y., WEINHANDL, R., TAMUR, M. A Meta-Analysis of the Effects of E-Books on students' mathematics achievement. In: *Heliyon*, 2022. vol. 8. e09432. DOI: 10.1016/j.heliyon.2022.e09432. Available: https://www.researchgate.net/publication/360817127_A_Meta-Analysis_of_the_Effects_of_E-Books_on_students'_mathematics_achievement.

8. European Commission. *Digital Education Action Plan 2021-2027*. Brussels, 2020. Available: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:52020DC0624>
9. EU4DIGITAL. *Council Recommendation on the key enabling factors for successful digital education and training*. Brussels, 2023. Available: <https://data.consilium.europa.eu/doc/document/ST-15741-2023-INIT/en/pdf>.
10. Republic of Moldova *Digital Transformation Strategy 2023–2030*. Available: https://mded.gov.md/wp-content/uploads/2023/11/STD_EN.pdf.
11. *Strategia de dezvoltare a educației pentru anii 2021-2030 „Educația-2030”*, Republica Moldova, 2023. Available: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=136600&lang=ro.
12. BALMUȘ, N., CHIRIAC, T. Activități interactive pentru manualele digitale de matematică: studiu de caz. În: *Lucrările Conferinței Naționale de Învățământ Virtual – CNIV*, 2022. pp.23-30. ISSN 1842-4708 ISSN-L 1842-4708 <https://cniv.ro/>.
13. SÎRGHI, O., CHIRIAC, T. Situații-problemă de matematică clasa 6-a. Implementare în aplicația MDIRConstructor 2.0. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, Cat. B, 2023. nr. 3(33), pp. 69-75. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v33i3.69-75>.
14. REZAT, S., STRĂȘER, R. From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. In: *ZDM Mathematics Education*, 2012. vol 44, pp. 641–651. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0448-4>.
15. MODÉN, M. U. *Teaching with digital mathematics textbooks. Activity theoretical studies of data-driven technology in classroom practices*. Doctoral Dissertation. Department of Applied Information Technology University of Gothenburg, Sweden, 2021. ISBN: 978-91-8009-482-5 (PRINT) ISBN: 978-91-8009-483-2 (PDF). Available: <http://hdl.handle.net/2077/69472>.
16. OECD. *OECD Digital Education Outlook 2023: Towards an Effective Digital Education Ecosystem*. OECD Publishing, Paris, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1787/c74f03de-en>. Available: https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/reports/2023/12/oecd-digital-education-outlook-2023_c827b81a/c74f03de-en.pdf.

UDC: 512.644

UNELE ASPECTE ALE MONOTONIEI FUNCȚIILOR ÎN REZOLVAREA ECUAȚIILOR

Andrei CORLAT, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-8261-1512>

e-mail: andrei.corlat@isa.utm.md, an.corlat@gmail.com

Universitatea Tehnică a Moldovei

Ion JARDAN, doctor, lector conferențiar

<https://orcid.org/0000-0002-3220-0774>

e-mail: ion.jardan@mate.utm.md, jordanion79@gmail.com

Institutul de Matematică și Informatică „Vladimir Andrunachievici”

USM, Republic of Moldova

Rezumat. În această comunicare sunt arătate și amintite prin exemple, procedee ce conțin utilizarea proprietăților monotoniei funcțiilor reale la rezolvarea ecuațiilor algebrice.

Cuvinte cheie: ecuații algebrice, funcție, monotonia funcției, funcție strict crescătoare, funcție strict descrescătoare.

SOME ASPECTS OF THE MONOTONY OF FUNCTIONS IN SOLVING EQUATIONS

Abstract. In this communication, procedures that use the monotonicity properties of real functions to solve algebraic equations are shown and mentioned through examples.

Keywords: algebraic equations, function, monotonicity of the function, strictly increasing function, strictly decreasing function.

În timpul rezolvării ecuațiilor algebrice se utilizează pe larg diverse proprietăți ale funcțiilor elementare: mărginirea, periodicitatea, paritatea, monotonia etc. [1, 2, 3, 4].

Proprietatea de monotonie se întâlnește mai des, de exemplu, dacă se cere de rezolvat ecuația de tipul $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ și $f(x)$ este o funcție strict crescătoare (descrescătoare), atunci funcția poate primi valoarea c în cel mult un punct. Punctul respectiv, de regulă, se determină ușor prin ghicire sau observare.

Aceeași situație avem, dacă se cere de rezolvat ecuația de tipul $f(x) = g(x)$, unde una dintre funcțiile f sau g este strict crescătoare, iar cealaltă este o funcție strict descrescătoare pe DVA al ecuației date. Deci, ecuația $f(x) = g(x)$ în cazul dat poate avea cel mult o soluție, care de obicei se observă.

Vom ilustra aceste lucruri prin următoarele exemple.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1} = 7(1).$$

Soluție. În $DVA = \frac{1}{2}; +\infty$) al ecuația (1), membrul stâng al ecuației date reprezintă o funcție strict crescătoare $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-1}$, ca sumă a două funcții strict crescătoare, iar membrul drept al ecuației este o constantă. Prin urmare, există cel mult o valoare lui x pentru care $f(x) = 7$. Ușor de observat, că pentru avem $x = 5$, avem $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$, ceea ce este un adevăr, deci $x = 5$ este unica soluție.

$$S = \{5\}.$$

Exemplul 2. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x^2-4} = 6 - 2x(2).$$

Soluție. În DVA al ecuației (2) $x \in [2; 3]$ (având condiția că și membrul din partea dreaptă a ecuației trebuie să fie nenegativ). Membrul stâng al ecuației date reprezintă o funcție strict crescătoare, ca sumă a trei funcții strict crescătoare, iar membrul drept al ecuației este o funcție strict descrescătoare. Așadar, există cel mult o soluție a acestei ecuații.

Rămâne de observat, că $x = 2$ satisface această ecuație.

$$S = \{2\}.$$

Exemplul 3. Să se rezolve ecuația

$$3\sqrt{x^2-9} + 6\sqrt{x^2-16} + 3\sqrt{x^2-25} = \frac{150}{x}(3).$$

Soluție. Ușor se observă că ecuației (3) poate avea soluții doar pentru $x \in 5; +\infty$). Pentru $x \in 5; +\infty$) membrul stâng al ecuației date reprezintă o funcție strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare, iar membrul drept al ecuației strict descrescătoare pe $x \in 5; +\infty$). Prin urmare, ecuația dată are cel mult o soluție.

Rămâne de observat că $x = 5$ verifică ecuația dată.

$$S = \{5\}.$$

Exemplul 4. Să se rezolve ecuația

$$8^x + 15^x = 17^x(4).$$

Soluție. Atât membrul din stânga al ecuației (4), cât și membrul din dreapta al ecuației (4) reprezintă funcții strict crescătoare în $DVA = \mathbb{R}$, ceea ce nu ne permite să scoatem vreo concluzie.

Dacă împărțim ambii termeni ai ecuației (4) la $17^x \neq 0$, se obține ecuația echivalentă cu cea dată

$$\left(\frac{8}{17}\right)^x + \left(\frac{15}{17}\right)^x = 1(5).$$

Acum, membrul din stânga al ecuației (5) reprezintă o funcție strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, ca sumă de două funcții strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, iar membrul din dreapta al ecuației (5) reprezintă o constantă, și astfel ecuația (5) are cel mult o soluție.

Se observă că $x = 2$ verifică ecuația (5), prin urmare $x = 2$ este unica soluție a ecuației (5).

$$S = \{5\}.$$

Exemplul 5. Să se rezolve ecuația

$$(3x + 1) \cdot 3^{x^2+x+4} = 81(6).$$

Soluție. Evident, pentru $x \in -\infty; -\frac{1}{3}$ ecuația (6) nu are soluții (se utilizează semnul funcției exponențiale). Pentru $x \in (\frac{1}{3}; +\infty)$ membrul din stânga ecuației (6) reprezintă o funcție strict crescătoare, ca produs a două funcții strict crescătoare și pozitive, iar membrul din partea dreaptă al ecuației (6) este o constantă. Prin urmare, avem cel mult o soluție a ecuației (6) și ușor se observă că această soluție este $x = 0$.

$$S = \{0\}.$$

Exemplul 6. Să se rezolve ecuația

$$2^x = 9 - \log_3 x \quad (7).$$

Soluție. În $DVA = (0; +\infty)$ al ecuației (7), membrul din stânga al ecuației (7) reprezintă o funcție strict crescătoare, iar membrul din dreapta al ecuației (7) este o funcție strict descrescătoare. Urmează, că ecuația (7) poate avea cel mult o soluție. Rămâne de observat că $x = 3$ verifică ecuația (7).

$$S = \{3\}.$$

În următorul exemplu vom utiliza proprietatea funcțiilor strict monotone: valorilor diferite ale argumentelor funcției le corespunde valori diferite ale funcției, și reciproc, valorilor diferite ale funcției le corespund valori diferite ale argumentelor funcției.

Exemplul 7. Să se rezolve ecuația

$$(3x - 1) \left(1 + \sqrt{9x^2 - 6x + 3} \right) + (2x - 4) \left(1 + \sqrt{4x^2 - 16x + 18} \right) = 0 \quad (8).$$

Soluție. În $DVA = \mathbb{R}$ ecuației (8) se poate scrie în forma

$$\begin{aligned} (3x - 1) \left(1 + \sqrt{9x^2 - 6x + 1 + 2} \right) &= -2(x - 2) \left(1 + \sqrt{4(x^2 - 4x + 4) + 2} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3x - 1) \left(1 + \sqrt{(3x - 1)^2 + 2} \right) &= -2(x - 2) \left(1 + \sqrt{(-2(x - 2))^2 + 2} \right) \quad (9). \end{aligned}$$

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t(1 + \sqrt{t^2 + 2})$. Deoarece derivata funcției f este $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, rezultă că f este o funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Atunci din (9), urmează $f(3x - 1) = f(-2(x - 2))$. Și deoarece f este o funcție strict crescătoare, utilizând proprietatea funcțiilor strict monotone, avem $3x - 1 = -2(x - 2)$, de unde $x = 1$ și ea este unica soluție.

$$S = \{1\}.$$

Procedee arătate în această comunicare pot fi aplicate de asemenea și la rezolvarea diferitor inecuații algebrice.

Bibliografie

1. COHAL, T., IUREA, G., POPA, G. *Probleme de matematică pentru clasa X*. Pitești: Paralele 45, 2010.
2. Școala Virtuală a Tânărului Matematician. <https://www.math.md/school/>
3. CORLAT, A., JARDAN, I. Aplicațiile proprietăților funcțiilor în rezolvarea ecuațiilor. In: *International Conference Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE-2023)*. Chisinau, June 26-29, 2023, Republic of Moldova, pp. 99. ISBN 978-9975-62-535-7.
4. CORLAT, A., JARDAN, I. Aplicarea monotoniei funcțiilor la rezolvarea ecuațiilor. In: *International Symposium "Actual Problems of Mathematics and Informatics" dedicated to the 90th birthday of professor Ion Valuță*. Chisinau, November 27-28, 2020, Republic of Moldova, pp. 135-136. ISBN 978-9975-45-677-7.

UDC: 372.851

STUDIAREA MATEMATICII ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL DE MASĂ PRIN CERCETAREA DIFERITELOR TIPURI DE PROBLEME

Elisa-Ioana FEȚANU, drd., prof. titular, gradul didactic I

<https://orcid.org/0009-0005-1363-5202>

e-mail: ely_oana1986@yahoo.com

Liceul Teoretic Marin Preda, București

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Chișinău

Rezumat. În articolul pe care îl voi prezenta, voi expune diferite tipuri de probleme de cercetare matematică, cu grad diferit de complexitate și dificultate, care ajută la dezvoltarea abilităților la elevii din ciclul gimnazial de învățământ.

Cuvinte cheie: dezvoltarea abilităților la elevi, probleme de cercetare matematică.

STUDYING MATHEMATICS IN MAINSTREAM EDUCATION BY RESEARCHING DIFFERENT TYPES OF PROBLEMS

Abstract. In the article I will present, I will present different types of mathematical research problems, with varying degrees of complexity and difficulty, which help develop skills in middle school students.

Keywords: developing students' skills, mathematical research problems.

1. Introducere

Este foarte important să căutăm noi mijloace care să favorizeze dezvoltarea elevilor cu ajutorul matematicii și a mecanismelor de includere a matematicii în procesul educațional.

Principalele obiective ale educației matematice sunt pregătirea elevilor pentru:

- comunicarea și raționarea cu noțiuni matematice;
- utilizarea matematicii cu încredere, acuratețe și eficiență pentru a rezolva probleme;
- aprecierea și prețuirea matematicii;
- să facă legături între cunoștințele și abilitățile matematice și aplicațiile acestora;
- să se angajeze să învețe pe tot parcursul vieții sale;
- să devină cetățean „alfabetizat matematic”, folosind matematica pentru a contribui la societate și pentru a gândi critic despre lume.

Elevii care au îndeplinit aceste obiective vor:

- obține înțelegerea și aprecierea contribuțiilor matematicii ca știință, filozofie și artă;
- manifesta o atitudine pozitivă față de matematică;
- să se angajeze și să persevereze în sarcini și proiecte matematice;
- contribui la discuții matematice în oricare context școlar sau/și social;
- să-și asume riscuri în îndeplinirea sarcinilor matematice;
- manifesta curiozitate în rezolvarea de probleme din viața de zi cu zi.

Fiecare pas al cadrului didactic făcut alături de elevul său, inducându-i și introducându-i diferite tehnici și modele de lucru, dezvoltă abilități practice, științifice și chiar personale.

Gradul de complexitate a unei probleme de matematică este un concept introdus de autor pentru a determina la elevii (claselor V-VIII) nivelul competențelor de cercetare în procesul de studiere a matematicii.

Astfel, ținând cont de experiența noastră, formulăm principiile de bază care țin de conceptul respectiv:

- C1. Complexitatea unei probleme de matematică este stabilită de autor, în funcție de propria viziune și experiență și presupune realizarea unui număr finit de Etape obligatorii care trebuie să le parcurgă elevul în procesul de rezolvare (cercetare) a unei probleme de matematică.
- C2. Fiecare Etapă rezolvată, în procesul de soluționare a unei probleme, determină un anumit nivel ori grad de complexitate a problemei.
- C3. Numărul de Etape parcurs, în viziune diferitor profesori ori în funcție de metoda de rezolvare, abordată de elev, poate fi diferit, dar rezultatul final în mod obligatoriu este același.
- C4. Gradul final de complexitate a problemei este determinat de profesor în funcție de numărul de Etape (operațiunile matematice, care trebuie parcurse).
- C5. Conceptul de complexitate, în opinia noastră, este importantă pentru a putea cuantifica competențele de cercetare a elevilor din gimnaziu și a fi în stare să se facă anumite comparații între nivelul de pregătire a elevilor

Problemele de matematică examinate mai jos au fost divizate în funcție de complexitatea lor.

2. Modele de probleme. Determinarea gradului de complexitate a problemei

Mai jos vom examina etapele rezolvării problemelor respective și vom stabili gradul de complexitate luând în considerare cele menționate mai sus.

Problema 1. Maria merge în tabăra de vară alături de colegii ei, pentru o săptămână, în Parcul Național Defileul Jiului, tabăra are o capacitate maximă pentru 10 fete și 10 băieți, în fiecare cameră fiind 2 cazați. Așezarea destinată copiilor se întinde pe o suprafață de 2 km. În prima zi vizitează locurile înconjurătoare taberei alături de însoțitorul grupului. Fiind o zonă muntoasă rocile au deviat atracția grupului, iar Maria a devenit interesată de structura și felul rocilor din zonă. În bagajul său exista o lupă pe care a folosit-o pentru a observa orice detaliu legat de rocă sau specificul acesteia, în acest fel au fost descoperiți lichenii. Descoperirile au continuat, lichenii se aflau pe rocile din apropierea apei. La o suprafață de 500 m se găsesc între 50 și 150 de roci, o fată strânge între 20 și 80 de roci, iar un băiat între 35 și 120.

- a) Câți elevi sunt în tabără, dacă în două camere este cazată o singură persoană?
- b) Care este numărul maxim de roci care conțin licheni, divizibil cu 45, pe care l-au putut obține copiii?
- c) Dar numărul minim de roci care conțin licheni divizibil cu 12?
- d) Câte este numărul minim de aranjamente pe care îl pot realiza folosind câte 5 roci (o rocă poate fi divizată în maxim două bucăți)? Dar numărul maxim? Nu contează tipul lichenilor saxicoli.

Rezolvare.

a) Conform datelor din problemă avem:

Cum fiecare cameră admite două persoane, atunci avem 5 camere pentru fete și 5 camere pentru băieți.

Cum în problemă este specificat faptul că avem două camere cu o singură persoană, atunci 8 camere sunt ocupate complet, iar în două camere avem două persoane, de unde deducem că avem în tabără 9 fete și 9 băieți.

Dacă ar fi fost două fete ar fi rămas, o cameră liberă, dacă ar fi fost doi băieți ar fi fost la fel, ar fi rămas o cameră liberă, deoarece ar fi fost cazați în aceeași cameră. Rezultă că cei doi ocupanți ai camerelor sunt o fată și un băiat.

b) O fată poate să strângă maxim 80 de roci care conțin licheni, cum numărul fetelor participante este de 9, rezultă:

$$9 \cdot 80 = 720 \text{ roci adunate de fete de pe o suprafață de } 500 \text{ de m.}$$

Un băiat poate să strângă maxim 120 de roci care conțin licheni, cum numărul băieților participanți este de 9, rezultă :

$$9 \cdot 120 = 1080 \text{ roci adunate de băieți de pe o suprafață de } 500 \text{ de m.}$$

Numărul total al rocilor care conțin licheni colectate într-o zi este:

$$720 + 1080 = 1800 \text{ roci care conțin licheni de pe o suprafață de } 500 \text{ de m.}$$

Numărul total al rocilor care conțin licheni colectate într-o zi de pe întreaga suprafață a întinderii taberei este:

$$1800 \cdot 4 = 7200 \text{ roci care conțin licheni de pe o suprafață de } 2 \text{ km (lungimea taberei).}$$

Numărul total de roci colectate pe perioada taberei este:

$$7 \cdot 7200 = 50400 \text{ roci care conțin licheni colectate într-o săptămână de pe o suprafață.}$$

Căutăm un număr divizibil cu 45, din teorie știm că acesta este un număr compus, deci trebuie să fie un număr simultan divizibil și cu 5, dar și cu 9.

Verificăm numărul maxim pe care l-am determinat dacă îndeplinește condiția cerută:

- 50400 este un număr divizibil cu 5, deoarece ultima cifră este 0.
- 50400 este un număr divizibil cu 9, deoarece suma cifrelor numărului 1800 este un număr multiplu de 9.

Deducem că numărul căutat este 50400 de roci care conțin licheni.

c) O fată poată să strângă minim 20 de roci care conțin licheni, cum numărul fetelor participante este de 9, rezultă :

$$9 \cdot 20 = 180 \text{ roci adunate de fete de pe o suprafață de 500 de m.}$$

Un băiat poată să strângă minim 35 roci care conțin licheni, cum numărul băieților participanți este de 9, rezultă:

$$9 \cdot 35 = 315 \text{ roci adunate de băieți de pe o suprafață de 500 de m.}$$

Numărul total al rocilor care conțin licheni colectate într-o zi este:

$$180 + 315 = 495 \text{ roci care conțin licheni de pe o suprafață de 500 de m.}$$

Numărul minim al rocilor care conțin licheni colectate într-o zi de pe întreaga suprafață a întinderii taberei este:

$$495 \cdot 4 = 1980 \text{ roci care conțin licheni de pe o suprafață de 2 km (lungimea taberei).}$$

Numărul total minim de roci colectate pe perioada taberei este:

$$7 \cdot 1980 = 13860 \text{ roci care conțin licheni colectate într-o săptămână de pe o suprafață.}$$

Căutăm un număr divizibil cu 12, din teorie știm că acesta este un număr compus, deci trebuie să fie un număr simultan divizibil și cu 3, dar și cu 4.

Verificăm numărul maxim pe care l-am determinat dacă îndeplinește condiția cerută:

- 13860 este un număr divizibil cu 3, deoarece suma cifrelor este multiplu de 3.
- 13860 este un număr divizibil cu 4, deoarece ultimele două cifre ale numărului sunt multiplu de 4.

Deducem că numărul minim căutat este 13860 de roci care conțin licheni.

a) După natura substratului pe care trăiesc lichenii pot fi:

- *Saxicoli*: Cresc pe stânci. Această categorie se subdivide, la rândul ei, în:
- *Endolitici*: Cresc în interiorul rocilor.
- *Epilitici*: Cresc pe suprafața rocilor.

De la orele de biologie elevii cunosc natura rocilor, așa cum am descris-o mai sus.

Pentru a realiza aranjamentele, elevii au luat toate rocile, le-au pus laolaltă și au obținut:

- numărul minim de aranjamente este:
- 1) Pentru numărul minim de roci, 13860, numărul de aranjamente este: $13860 : 5 = 2772$ de aranjamente;
- 2) Pentru numărul minim de roci, 50400, numărul de aranjamente este: $50400 : 5 = 10080$ de aranjamente.

Numărul minim de aranjamente este cuprins între 2772 și 10080.

- numărul maxim de aranjamente este:
- 1) Pentru numărul minim de roci, 13860, numărul de aranjamente este: $(13860 \cdot 2) : 5 = 5544$ de aranjamente;
- 2) Pentru numărul minim de roci, 50400, numărul de aranjamente este: $(50400 \cdot 2) : 5 = 20160$ de aranjamente.

Numărul maxim de aranjamente este cuprins între 5544 și 20160 (deoarece fiecare rocă se împarte în două părți).

Tabelul 1. Analiza problemei din perspectiva gradului de complexitate

Etape	Operații matematice	Grad de dificultate
Etapa 1.	Alcătuirea modelului matematic $10f+10b=20$ elevi $(10-1)f+(10-1)b=18$ elevi	Realizarea Etapei I, care constă în elaborarea modelului matematic va fi considerată că depășirea <u>gradului I de dificultate (două operații logice)</u>
Etapa 2.	Aflarea numărului de roci care conțin licheni $9*80=720$ roci adunate de fete $9*120=1080$ roci adunate de băieți $720+1080=1800$ roci colectate într-o zi de pe o suprafață de 500 m Analog și la minim	Aflarea numărului total de roci care conțin licheni (Etapa 2) obținute denotă depășirea <u>nivelului II ori gradului II de dificultate</u>
Etapa 3.	Identificarea faptului că: $1800*4=7200$ roci care conțin licheni de pe o suprafață de 2 km (lungimea taberei) $7*7200=50400$ maximul de roci care conțin licheni colectate într-o săptămână $50400 : 45 \begin{cases} 50400 : 9 \\ 50400 : 5 \end{cases}$ Analog și la minim	Identificarea faptului că $50400 : 45 \begin{cases} 50400 : 9 \\ 50400 : 5 \end{cases}$ denotă realizarea Etapei 3, ori <u>depășirea gradului III de dificultate</u>
Etapa 4.	Scrierea răspunsului corect Numărul minim de aranjamente este cuprins între 2772 și 10080. Numărul maxim de aranjamente este cuprins între 5544 și 20160.	Realizarea Etapei 4 denotă depășirea <u>nivelului IV ori gradului 4 de dificultate</u>

În procesul de desfășurare a experimentului pedagogic se va stabili câte procente de elevi din clasa experimentală și clasa de control vor parcurge fiecare din etapele punctate mai sus:

Rezultatul	Gradul de complexitate	Procente
N1 elevi au trecut Etapa 1	Gradul I de complexitate	P1%
N2 elevi au trecut Etapa 2	Gradul II de complexitate	P2 %
N3 elevi au trecut Etapa 3	Gradul III de complexitate	P3%
N4 elevi au trecut Etapa 4	Gradul IV de complexitate	P4 %

Bibliografie

1. BÎRCHI, I. D. *Olimpiade și concursuri de matematică*. Editura Bîrchi, 2015.
2. LUPU, I. *Metodologia rezolvării problemelor de demonstrație la matematică*. Editura Prut Internațional, 2007.
3. CHIRCIU, M., ULMEANU, S., CHERA, I. et all. *Matematică. Olimpiade și concursuri școlare – clasa a VII-a*. Editura Tiparg, 2009.

UDC: 514.123:004.4

O PROBLEMĂ CU 4 PUNCTE NECOPLANARE REZOLVATĂ ÎN MAPLE

Raluca Mihaela GEORGESCU, dr., lector univ.,

<https://orcid.org/0009-0007-1439-4388>

e-mail: raluca.georgescu@upit.ro

Cristina Vasilica TUDOSE, dr., lector univ.,

<https://orcid.org/0009-0003-9855-4043>

e-mail: cristina.tudose@upit.ro

Universitatea Națională de Știință și Tehnologie Politehnica București,
Centrul Universitar Pitești

Rezumat. În această lucrare se propune utilizarea mediului Maple pentru rezolvarea unei probleme de geometrie analitică pornind de la 4 puncte necoplanare din spațiul euclidian tridimensional. Rezolvarea clasică pentru majoritatea cerințelor problemei necesită aplicarea aceleiași formule de mai multe ori, pierzându-se astfel foarte mult timp. Din acest motiv, propunem un exemplu de rezolvare automată a cerințelor propuse, folosind mediul Maple.

Cuvinte cheie: linie, distanță, plan, Maple.

A 4-POINT NON-COPLANAR PROBLEM SOLVED IN MAPLE

Abstract. This paper proposes the use of the Maple environment for solving an analytical geometry problem starting from 4 non-coplanar points in three-dimensional Euclidean space. The classical solution for most of the problem's requirements involves applying the same formula multiple times, thus wasting a lot of time. For this reason, we propose an example of automatic solution for the proposed requirements, using the Maple environment.

Keywords: straight line, distance, plane, Maple.

Introducere

În ultimii ani se pune accent din ce în ce mai mult pe folosirea calculatorului în toate domeniile. În ceea ce privește predarea matematicii, s-a constatat că utilizarea de aplicații specializate îi face pe studenți să înțeleagă mai repede și mai ușor noțiunile predate. Referindu-ne la disciplina Geometrie analitică și computațională, aplicațiile cum ar fi Maple, permit, pe lângă rezolvarea problemelor matematice, și realizarea de grafice sugestive, materia devenind astfel mai atractivă pentru studenți.

În ceea ce urmează vom considera 4 puncte necoplanare din spațiul euclidian tridimensional și vom rezolva mai multe cerințe. Pentru partea teoretică se pot consulta resursele [1],[2], în această lucrare prezentându-se doar rezolvarea folosind Maple.

Problema propusă

Se consideră punctele necoplanare $A_1(1,1,1)$, $A_2(-1,2,3)$, $A_3(0,2,4)$ și $A_4(2,-3,1)$.

Vom folosi pachetul geom3d din mediul Maple:

with(geom3d);

Vom crea cele 4 puncte și le vom salva într-o listă denumită *puncte*, pentru a le putea utiliza ulterior:

lista_coord := [[1, 1, 1], [-1, 2, 3], [0, 2, 4], [2, -3, 1]];

```
creeaza_puncte := proc(lista_coord)
    local i, puncte, nume_punct;
    puncte := [ ];
    for i to 4 do
        nume_punct := cat(A, i);
        point(nume_punct, op(lista_coord[i]));
        puncte := [op(puncte), eval(nume_punct)];
    end do;
    return puncte;
end proc;
```

Apel procedură:

puncte := creeaza_puncte(lista_coord);

Rezultat:

puncte := [A1, A2, A3, A4]

Cerințe:

- 1) Să se determine câte drepte se pot forma cu cele 4 puncte.

Cele 4 puncte determină $C_4^2 = 6$ drepte.

Notăm cu d_{ij} dreapta ce trece prin punctele A_i și A_j .

Construim cele 6 drepte cu ajutorul procedurii:

```
construieste_drepte := proc(puncte :: list)
    local i, j, pi, pj, nume_dreapta;
    for i to 3 do
        for j from i + 1 to 4 do
            pi := puncte[i];
            pj := puncte[j];
            nume_dreapta := cat(d, i, j);
            line(nume_dreapta, [pi, pj]);
            printf("Dreapta d%d%d definita de punctele %a si %a\n", i, j, pi, pj);
        end do;
    end do;
end proc;
```

Apel procedură:

construieste_drepte(puncte);

Rezultat:

Dreapta d12 definita de punctele A1 si A2

Dreapta d13 definita de punctele A1 si A3

Dreapta d14 definita de punctele A1 si A4

Dreapta d23 definita de punctele A2 si A3

Dreapta d24 definita de punctele A2 si A4

Dreapta d34 definita de punctele A3 si A4

- 2) Să se stabilească pozițiile relative ale dreptelor ce se pot forma cu ajutorul celor 4 puncte (paralele, perpendiculare, secante, necoplanare).

```
clasifica_drepte := proc(puncte :: list)
    local i, j, k, l, dij, dkl;
    for i from 1 to 3 do
        for j from i + 1 to 4 do
            for k from i to 3 do
                for l from k + 1 to 4 do
                    if (i ≠ k or j < l) then
                        dij := eval(cat(d, i, j));
                        dkl := eval(cat(d, k, l));
                        if AreParallel(dij, dkl) then
                            printf("Dreptele d%d%d si d%d%d sunt paralele\n", i, j, k, l);
                        elif ArePerpendicular(dij, dkl) then
                            printf("Dreptele d%d%d si d%d%d sunt perpendiculare\n", i, j, k, l);
                        elif AreCoplanar(dij, dkl) then
                            printf("Dreptele d%d%d si d%d%d sunt secante\n", i, j, k, l);
                        else
                            printf("Dreptele d%d%d si d%d%d sunt necoplanare\n", i, j, k, l);
                        end if;
                    end if;
                end do;
            end do;
        end do;
    end do;
end proc;
```

Apel procedură:

clasifica_drepte(puncte);

Rezultat:

Dreptele d12 si d13 sunt secante
Dreptele d12 si d14 sunt secante
Dreptele d12 si d23 sunt perpendiculare
Dreptele d12 si d24 sunt secante
Dreptele d12 si d34 sunt necoplanare
Dreptele d13 si d14 sunt secante
Dreptele d13 si d23 sunt secante
Dreptele d13 si d24 sunt necoplanare
Dreptele d13 si d34 sunt secante
Dreptele d14 si d23 sunt necoplanare
Dreptele d14 si d24 sunt secante
Dreptele d14 si d34 sunt secante

Dreptele d23 si d24 sunt secante

Dreptele d23 si d34 sunt secante

Dreptele d24 si d34 sunt secante

3) Să se construiască planele determinate de cele 4 puncte necoplanare.

```
construieste_plane := proc(puncte :: list)
local i,j,k,n, pi,pj,pk, nume_plan;
for i to 2 do
    for j from i + 1 to 3 do
        for k from j + 1 to 4 do
            pi := puncte[i];
            pj := puncte[j];
            pk := puncte[k];
            nume_plan := cat(P,i,j,k);
            plane(nume_plan, [pi,pj,pk]);
            printf("Planul %s determinat de punctele %a, %a si %a\n",
                convert(nume_plan, string), pi,pj,pk);
        end do;
    end do;
end do;
end proc;
```

Apel procedură:

construieste_plane(puncte);

Rezultat:

Planul P123 determinat de punctele A1, A2 si A3

Planul P124 determinat de punctele A1, A2 si A4

Planul P134 determinat de punctele A1, A3 si A4

Planul P234 determinat de punctele A2, A3 si A4

4) Să se calculeze distanța de la un punct la o dreaptă pentru toate situațiile posibile.

```
distanțe_puncte_la_drepte := proc(puncte :: list)
local i,j,k, pi,pj,pk,d,dist;
for i to 4 do
    pi := puncte[i];
    for j to 3 do
        for k from j + 1 to 4 do
            if i ≠ j and i ≠ k then
                pj := puncte[j];
                pk := puncte[k]; d := 'd';
                d := eval(cat(d,j,k));
                dist := distance(pi,d);
                printf("Distanța de la punctul A%d la dreapta d%d%d este %.3f\n", i,j,k, dist);
            end if;
        end do;
    end do;
end do;
end proc;
```

Apel procedură:

distanțe_puncte_la_drepte(puncte);

Rezultat:

Distanța de la punctul A1 la dreapta d23 este 3.000
Distanța de la punctul A1 la dreapta d24 este 1.755
Distanța de la punctul A1 la dreapta d34 este 2.065
Distanța de la punctul A2 la dreapta d13 este 1.279
Distanța de la punctul A2 la dreapta d14 este 2.623
Distanța de la punctul A2 la dreapta d34 este 1.405
Distanța de la punctul A3 la dreapta d12 este 1.414
Distanța de la punctul A3 la dreapta d14 este 3.087
Distanța de la punctul A3 la dreapta d24 este 1.405
Distanța de la punctul A4 la dreapta d12 este 3.606
Distanța de la punctul A4 la dreapta d13 este 3.838
Distanța de la punctul A4 la dreapta d23 este 6.124

- 5) Să se calculeze distanța de la un punct la un plan pentru toate situațiile posibile.

```
distanțe_puncte_la_plane := proc(puncte :: list)
local i, j, k, l, pi, plan_nume, dist;
for i to 4 do
  pi := puncte[i];
  for j to 2 do
    for k from j + 1 to 3 do
      for l from k + 1 to 4 do
        if i ≠ j and i ≠ k and i ≠ l then
          plan_nume := cat(P, j, k, l);
          if assigned(plan_nume) then
            dist := distance(pi, eval(plan_nume));
            printf("Distanța de la punctul %s la planul %s este\n", pi, convert(plan_nume, string), evalf(dist));
          else
            printf("Planul %s nu este definit\n", convert(plan_nume, string));
          end if;
        end if;
      end do;
    end do;
  end do;
end do;
end proc;
```

Apel procedură:

distanțe_puncte_la_plane(puncte);

Rezultat:

Distanța de la punctul A1 la planul P234 este 1.7321
Distanța de la punctul A2 la planul P134 este 1.1785
Distanța de la punctul A3 la planul P124 este 1.3868

Distanța de la punctul A4 la planul P123 este 3.5355

6) Să se calculeze distanța dintre două drepte pentru toate situațiile posibile.

```
distanțe_drepte := proc(puncte :: list)
local i, j, k, l, d1, d2, dist;
for i to 3 do
for j from i + 1 to 4 do
for k from i + 1 to 3 do
for l from k + 1 to 4 do
if i ≠ k and i ≠ l and j ≠ k and j ≠ l then
d1 := eval(cat(d, i, j));
d2 := eval(cat(d, k, l));
dist := distance(d1, d2);
printf("Distanța dintre dreptele d%d%d și d%d%d este %.4f\n", i, j, k, l,
evalf(dist));
end if;
end do;
end do;
end do;
end do;
end proc;
```

Apel procedură:

distanțe_drepte(puncte);

Rezultat:

Distanța dintre dreptele d12 și d34 este 1.3868

Distanța dintre dreptele d13 și d24 este 1.0067

Distanța dintre dreptele d14 și d23 este 2.6112

7) Să se determine măsura unghiurilor dintre două drepte pentru toate situațiile posibile.

```
unghi_2drepte := proc(puncte :: list)
local i, j, k, l, d1, d2, u_rad, u_deg, grade, minute, secunde;
for i to 3 do
for j from i + 1 to 4 do
for k from i to 3 do
for l from k + 1 to 4 do
if (i ≠ k or j < l) then
d1 := eval(cat(d, i, j));
d2 := eval(cat(d, k, l));
u_rad := FindAngle(d1, d2);
u_deg := evalf(180 * u_rad / Pi);
grade := trunc(u_deg);
minute := trunc(60 * (u_deg - grade));
secunde := round(3600 * (u_deg - grade - minute / 60));
printf("Unghiul dintre d%%a și d%%a este %d° %d' %d''\n",
i, j, k, l, grade, minute, secunde);
end if;
end do;
end do;
end do;
end do;
end proc;
```

Apel procedură:

unghi_2drepte(puncte);

Rezultat:

Unghiul dintre d12 și d13 este 25° 14' 22"
 Unghiul dintre d12 și d14 este 60° 58' 58"
 Unghiul dintre d12 și d23 este 90° 0' 0"
 Unghiul dintre d12 și d24 este 35° 47' 45"
 Unghiul dintre d12 și d34 este 35° 47' 45"
 Unghiul dintre d13 și d14 este 68° 33' 12"
 Unghiul dintre d13 și d23 este 64° 45' 38"
 Unghiul dintre d13 și d24 este 46° 46' 59"
 Unghiul dintre d13 și d34 este 38° 30' 7"
 Unghiul dintre d14 și d23 este 80° 7' 30"
 Unghiul dintre d14 și d24 este 25° 11' 14"
 Unghiul dintre d14 și d34 este 30° 3' 4"
 Unghiul dintre d23 și d24 este 83° 24' 48"
 Unghiul dintre d23 și d34 este 83° 24' 48"
 Unghiul dintre d24 și d34 este 13° 10' 25"

8) Să se calculeze unghiul dintre o dreaptă și un plan pentru toate situațiile posibile.

```
unghi_dreapta_plan := proc(puncte :: list)
    local i,j,k,l,m,d_obj,p_obj,d_name,p_name;
    local d_indices,p_indices,common_pts;
    local u_rad,u_deg,grade,minute,secunde;

    for i to 3 do
        for j from i + 1 to 4 do
            d_name := cat(d,i,j);
            d_obj := eval(d_name);
            for k to 2 do
                for l from k + 1 to 3 do
                    for m from l + 1 to 4 do
                        p_name := cat(P,k,l,m);
                        p_obj := eval(p_name);
                        d_indices := {i,j};
                        p_indices := {k,l,m};
                        common_pts := nops(d_indices intersect p_indices);
                        if common_pts = 1 then
                            u_rad := abs(FindAngle(d_obj,p_obj));
                            u_deg := evalf(180*u_rad/Pi);
                            grade := trunc(u_deg);
                            minute := trunc(60*(u_deg - grade));
                            secunde := round(3600*(u_deg - grade) - 60*minute);
                            printf("Unghiul dintre d%d%d și P%d%d%d este %d° %d' %d\"n",
                                i,j,k,l,m,grade,minute,secunde);
                        end if;
                    end do;
                end do;
            end do;
        end do;
    end do;
end proc;
```

Apel procedură:

unghi_dreapta_plan(puncte);

Rezultat:

Unghiul dintre d12 și P134 este 23° 7' 52"
 Unghiul dintre d12 și P234 este 35° 15' 52"
 Unghiul dintre d13 și P124 este 24° 42' 58"
 Unghiul dintre d13 și P234 este 31° 28' 56"
 Unghiul dintre d14 și P123 este 59° 2' 10"
 Unghiul dintre d14 și P234 este 24° 50' 24"
 Unghiul dintre d23 și P124 este 78° 41' 24"
 Unghiul dintre d23 și P134 este 56° 26' 34"
 Unghiul dintre d24 și P123 este 34° 59' 51"
 Unghiul dintre d24 și P134 este 11° 1' 18"
 Unghiul dintre d34 și P123 este 34° 59' 51"
 Unghiul dintre d34 și P124 este 13° 0' 2"

9) Să se calculeze unghiurile dintre două plane pentru toate situațiile posibile.

```
unghi_2plane := proc(puncte :: list)
    local i, j, k, l, m, n;
    local p1_name, p2_name, p1_obj, p2_obj;
    local indices1, indices2, common_pts;
    local u_rad, u_deg, grade, minute, secunde;

    for i to 2 do
        for j from i + 1 to 3 do
            for k from j + 1 to 4 do
                p1_name := cat(P, i, j, k);
                p1_obj := eval(p1_name);
                indices1 := {i, j, k};
                for l to 2 do
                    for m from l + 1 to 3 do
                        for n from m + 1 to 4 do
                            p2_name := cat(P, l, m, n);
                            p2_obj := eval(p2_name);
                            indices2 := {l, m, n};
                            common_pts := nops(indices1 intersect indices2);
                            if common_pts < 3 and (i < l or j < m or k < n) then
                                u_rad := FindAngle(p1_obj, p2_obj);
                                u_deg := evalf(180 * u_rad / Pi);
                                grade := trunc(u_deg);
                                minute := trunc(60 * (u_deg - grade));
                                secunde := round(3600 * (u_deg - grade) - 60 * minute);
                                printf("Unghiul dintre P%d%d%d și P%d%d%d este %d° %d' %d"\n",
                                    i, j, k, l, m, n, grade, minute, secunde);
                            end if;
                        end do;
                    end do;
                end do;
            end do;
        end do;
    end do;
end proc;
```

Apel procedură:

unghi_2plane(puncte);

Rezultat:

Unghiul dintre P123 și P124 este 78° 41' 24"

Unghiul dintre P123 și P134 este 67° 6' 53"

Unghiul dintre P123 și P234 este 35° 15' 52"

Unghiul dintre P124 și P134 este 26° 41' 39"

Unghiul dintre P124 și P234 este 80° 47' 8"

Unghiul dintre P134 și P234 este 57° 1' 16"

10) Să se calculeze ariile triunghiurilor determinate de cele 4 puncte.

```
arii_triunghiuri := proc(puncte :: list)
  local i, j, k, pi, pj, pk, nume_triunghi, arie;
  for i to 2 do
    for j from i + 1 to 3 do
      for k from j + 1 to 4 do
        pi := puncte[i];
        pj := puncte[j];
        pk := puncte[k];
        nume_triunghi := cat(T, i, j, k);
        triangle(nume_triunghi, [pi, pj, pk]);
        arie := evalf(area(nume_triunghi));
        printf("Triunghiul %a cu vârfurile A%d, A%d, A%d are aria %.4f\n",
              nume_triunghi, i, j, k, arie);
      end do;
    end do;
  end do;
end proc;
```

Apel procedură:

arii_triunghiuri(puncte);

Rezultat:

Triunghiul T123 cu vârfurile A1, A2, A3 are aria 2.1213

Triunghiul T124 cu vârfurile A1, A2, A4 are aria 5.4083

Triunghiul T134 cu vârfurile A1, A3, A4 are aria 6.3640

Triunghiul T234 cu vârfurile A2, A3, A4 are aria 4.3301

11) Să se calculeze volumul tetraedrului generat de cele 4 puncte.

```
volum_tetraedru := proc(puncte :: list)
  local vol;
  gtetrahedron(T1234, [op(puncte)]);
  vol := evalf(volume(T1234));
  printf("Volumul tetraedrului este: %.4f\n", vol);
end proc;
```

Apel procedură:

`volum_tetraedru(puncte);`

Rezultat:

Volumul tetraedrului este: 2.5000

12) Reprezentări grafice:

- a) Reprezentarea punctelor (Figura 1):
 - `draw(puncte)`
- b) Reprezentarea dreptelor (Figura 2):
 - `draw({d12, d13, d14, d23, d24, d34})`
- c) Reprezentarea planelor (Figura 3):
 - `draw({P123, P124, P134, P234})`
- d) Reprezentarea tetraedrului format cu cele 4 puncte (Figura 4):
 - `draw({P123, P124, P134, P234})`

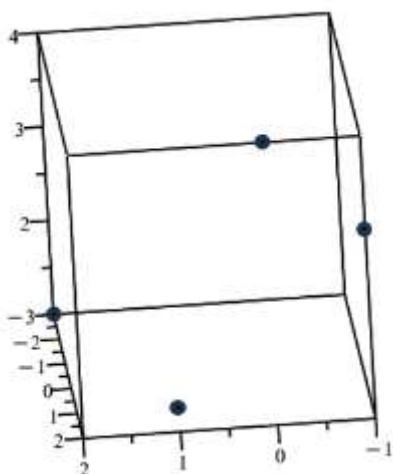


Figura 1. Reprezentarea punctelor

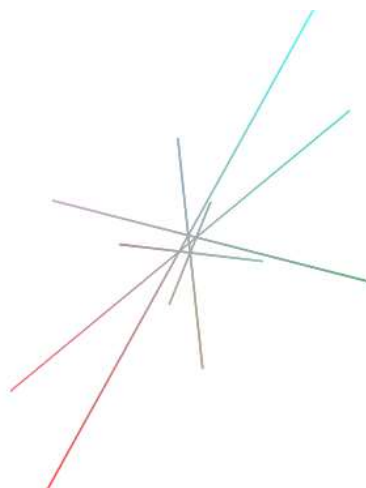


Figura 2. Reprezentarea dreptelor

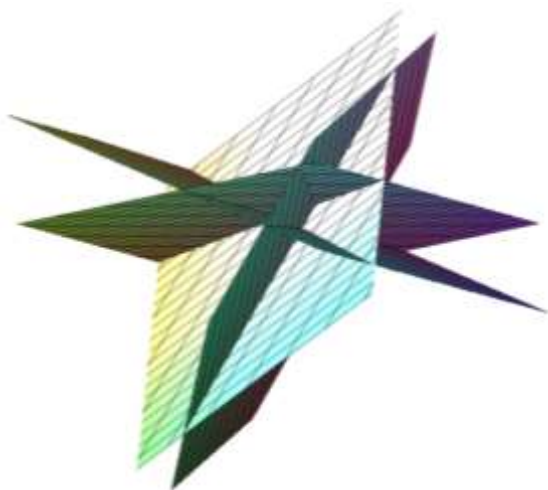


Figura 3. Reprezentarea planelor



Figura 4. Reprezentarea tetraedrului

Concluzii

Mediul de programare Maple este un rezolvitor de probleme. În ceea ce ne privește pe noi, din punctul de vedere al geometriei analitice și vectoriale, Maple oferă, printre multe altele, o soluție rapidă pentru rezolvarea numerică a problemelor de geometrie analitică, dar mai ales permite reprezentarea figurilor geometrice în sistemul de axe de coordonate. Acest mediu de programare este flexibil și ușor de utilizat.

În această lucrare s-au prezentat câteva programe Maple care sunt utile pentru studiul noțiunilor legate de puncte, drepte, plane și care pot ajuta studenții să înțeleagă mai bine noțiunile teoretice.

Bibliografie

1. GEORGESCU, R. M. Determinarea pozițiilor relative a mai multor drepte în plan cu ajutorul mediului Maple. În: *MATINF Publicație bianuală de matematică și informatică pentru elevi și profesori*. Editura Universității din Pitești, 2018. ISSN 2601-9426.
2. PĂLTINEANU, G., DONESCU, Ș., ZAMFIR, M. *Geometrie analitică și diferențială*. Ed. Conspress, 2011. ISBN 978-973-100-147-0.
3. Source: <https://www.maplesoft.com/>

UDC: 316.77:004.9:32(478)

ANALIZA FENOMENULUI DE DEZINFORMARE ÎN REPUBLICA MOLDOVA PRIN PRISMA SOCIALĂ ȘI TEHNOLOGICĂ

Angela GLOBA, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-2653-0320>

e-mail: globa.angela@upsc.md

Ala GASNAȘ, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-7174-7027>

e-mail: gasnas.ala@upsc.md

Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. Cercetarea propusă este dictată de situația actuală din Republica Moldova. Alfabetizarea informațională și media (AIM) este un domeniu relativ recent, iar dezvoltarea competențelor în acest domeniu devine tot mai importantă fiind dictată de fluxul de informație, care, la fel, este în creștere. Pandemia, războiul din Ucraina, alegerile parlamentare sunt doar câteva motive întemeiate pentru dezvoltarea gândirii critice și rezistența la dezinformare în rândul cetățenilor. Nivelul scăzut de alfabetizare informațională și media pune în pericol principiile democratice și reprezintă un risc sporit pentru securitatea națională. În articol sunt scoase în evidență impactul AI în detectarea dezinformării.

Cuvinte cheie: dezinformare, malinformare, misinformare, știri false, deepfake, rețele de socializare, mass-media, social media, alfabetizare informațională și media.

ANALYSIS OF THE DISINFORMATION PHENOMENON IN THE REPUBLIC OF MOLDOVA FROM A SOCIAL AND TECHNOLOGICAL PERSPECTIVE

Summary. The proposed research is driven by the current situation in the Republic of Moldova. Media and Information Literacy (MIL) is a relatively recent field, and the development of competencies in this area is becoming increasingly important, driven by the growing flow of information, which is also on the rise. The pandemic, the war in Ukraine, and parliamentary elections are just a few well-founded reasons for fostering critical thinking and resilience to disinformation among citizens. The low level of media and information literacy poses a threat to democratic principles and represents an increased risk to national security. The article emphasizes the impact of AI in detecting disinformation

Keywords: disinformation, malinformation, misinformation, fake news, deepfake, social networks, mass media, social media, media and information literacy.

Știrile false au un impact semnificativ asupra societății, afectând, de regulă, cele mai vulnerabile grupuri de populație: tânăra generație și vârstnicii [1]. Statisticile arată că perioada 2016 - 2025 a fost cea mai afectată de fenomenul dezinformării. În era digitală, accesul rapid la informație nu garantează și veridicitatea acesteia, ceea ce face ca dezinformarea să devină un fenomen periculos. Tinerii, fiind utilizatori activi ai rețelelor sociale, sunt expuși zilnic la știri neverificate, ceea ce le poate influența opiniile și comportamentele. În același timp, persoanele vârstnice, având o experiență digitală mai

limitată, sunt adesea victime ale manipulării informaționale, ceea ce poate duce la răspândirea neintenționată a dezinformării.

În prezent, mass-media utilizează o varietate de termeni pentru a descrie fenomenul răspândirii știrilor false, cum ar fi: malinformare, misinformare, dezinformare, jurnalism galben sau presa galbenă, fake news, propagandă, manipulare, influencer, blogger, vlogger etc. [2, 3, 4].

Începând cu anul 2008 se utilizează un nou termen *alfabetizare informațională și media*, introdus de UNESCO, care se referă la competențe de analiză a conținuturilor bibliotecilor, informațiilor mass-media și știrilor din mediul online.

Analizând cadrul legal al Republicii Moldova privind accesul la informație și protecția cetățenilor contra dezinformării se poate afirma că acesta este unul complex, în continuă modificare, grație schimbărilor care au loc în cadrul legal internațional (tab. 1).

Tabelul 1. Acte normative ale Republicii Moldova privind asigurarea accesului la informație pentru cetățeni și contracararea fenomenului de dezinformare

(articolele menționate servesc drept exemplu și nu limitează aplicarea actului normativ pentru combaterea dezinformării pe alte articole componente).

Act normativ	Reglementare
Constituția Republicii Moldova [5]	Articolul 32. Libertatea opiniei și a exprimării; Articolul 34. Dreptul la informație;
Codul serviciilor media audiovizuale al Republicii Moldova [6]	1) asigurarea dreptului la informații corecte și obiective; 2) dreptul la formarea liberă a opiniilor; 3) garantarea dreptul la independență editorială și libertatea de exprimare; 4) asigură independența autorității de reglementare în domeniul serviciilor media audiovizuale; 5) asigură independență organelor de supraveghere a activității furnizorilor publici de servicii media; 6) asigură, menține și dezvoltă pluralismul audiovizual; 7) asigură protecția și dezvoltarea spațiului audiovizual național. Notă. De menționat că prezentul cod nu se aplică pentru o mare parte din resursele și serviciile web fapt ce produce efecte negative pentru cetățeni, aceștia fiind neasigurați în mediul online.
Legea privind Centrul pentru Comunicare Strategică și Combatere a Dezinformării și privind modificarea unor acte normative [7]	Prezenta lege stabilește statutul, cadrul juridic, principiile, misiunea, atribuțiile, drepturile, obligațiile, modul de organizare și finanțare ale Centrului pentru Comunicare Strategică și Combatere a Dezinformării.
Legea nr. 48 din 16.03.2023 privind securitatea cibernetică [8]	Se referă la asigurarea securității informaționale în mediul online.

Legea securității statului nr. 618/1995 [9]	Articolul 4. Amenințări la adresa securității statului (instigare la acțiuni de violență, activitatea structurii informative ilegale, culegerea neautorizată de informații, campanii de propagandă ostilă sau de dezinformare, care pot dăuna regimului constituțional, propagarea ideilor și valorilor teroriste și extremiste, influențarea proceselor electorale în scopul promovării intereselor altor state, ale entităților anticonstituționale, ale unui grup criminal organizat sau ale unei organizații criminale,
	Articolul 7. Respectarea drepturilor și libertăților omului în cadrul asigurării securității statului (nicio persoană nu poate fi urmărită pentru exprimarea liberă a opiniilor sale politice și religioase);
	Articolul 8. Dreptul cetățenilor la informare asupra activității organelor securității statului și asupra problemelor ce țin de interesele lor personale;
Legea nr. 120/2017 privind prevenirea și combaterea terorismului [10]	Articolul 7. Împuternicirile autorităților cu competențe în domeniul prevenirii și combaterii terorismului ((1) Serviciul de Informații și Securitate previne și combate terorismul prin... f) colectarea, analiza și valorificarea informațiilor despre potențialele riscuri și amenințări la adresa securității antiteroriste, obținute în urma desfășurării activității informative și contrainformative); (5) Agenția Servicii Publice, împreună cu alte autorități publice și cu furnizorii de rețele sau servicii de comunicații electronice, asigură asistența informațională a autorităților ce desfășoară activitatea de prevenire și combatere a terorismului, punând la dispoziția acestora, în mod gratuit, resurse informaționale și rețele de comunicații electronice, acordând asistență tehnică specializată necesară pentru crearea unor bănci de date și sisteme informaționale.
	Articolul 8. Centrul Antiterorist al Serviciului de Informații și Securitate (reglementează funcțiile și împuternicirile centrului care include și analiza informațiilor din mass-media, mediul online etc.);
	Capitolul V. Informarea opiniei publice asupra activității teroriste;
Strategia securității naționale a Republicii Moldova [11]	Conform viziunii Președintei Republicii Moldova „, Federația Rusă a ... întreprins acțiuni de destabilizare a țării prin intermediul atacurilor cibernetice și al campaniilor de dezinformare...”;
	20. Securitatea Republicii Moldova poate fi expusă următoarelor riscuri: (3) cibernetice
	21. Republica Moldova se confruntă cu mai multe vulnerabilități...: (6) în domeniul informational, care se identifică prin concentrarea masivă a activelor pe piața media; propagarea dezinformării prin mass-media sau pe piața digital de către persoane agresive; lipsa AIM; (7) în domeniul cibernetice, care includ lipsa unei igiene cibernetice în rândul populației și al funcționarilor publici cât și echipamente informatice învechite menite să asigure securitatea cibernetică.
Codul penal al Republicii Moldova [12]	28. În vederea realizării obiectivelor naționale de securitate și apărare... Strategia stabilește următoarele direcții de acțiune: 4) securitatea și reziliența informațională; 8) securitatea și reziliența cibernetică;
	Articolul 135 ² . Propaganda genocidului sau a infracțiunilor împotriva umanității;
	Articolul 140. Propaganda războiului;
	Articolul 176. Încălcarea egalității în drepturi a cetățenilor;

	Articolul 176 ¹ . Încălcarea drepturilor cetățenilor prin propagarea fascismului, a rasismului și a xenofobiei și prin negarea Holocaustului;
	Articolul 177. Încălcarea inviolabilității vieții personale;
	Articolul 177 ¹ . Falsul de identitate;
	Articolul 178. Violarea dreptului la secretul corespondenței;
	Articolul 180. Încălcarea intenționată a legislației privind accesul la informație;
	Articolul 180 ¹ . Împiedicarea intenționată a activității mass-media sau intimidarea pentru critică;
	Articolul 180 ² . Cenzura;
	Articolul 185 ¹ . Încălcarea dreptului de autor și a drepturilor conexe;
	Articolul 185 ³ . Declarațiile intenționate false în documentele de înregistrare ce țin de protecția proprietății intelectuale;
	Articolul 185 ⁴ . Încălcarea privind măsurile tehnice și informațiile referitoare la gestionarea dreptului de autor și a drepturilor conexe;
	Articolul 220 ¹ . Îndemnul, determinarea sau înlesnirea la prestarea serviciilor sexuale online;
	Capitolul XI. Infracțiuni informatice și infracțiuni în domeniul comunicațiilor electronice;
	Articolul 324. Coruperea pasivă;
	Articolul 324 ¹ . Corupere politică pasivă;
	Articolul 325. Coruperea activă;
	Articolul 325 ¹ . Coruperea politică activă;
	Articolul 326. Traficul de influență;
	Articolul 338 ¹ . Constituirea unei structuri informative ilegale;
	Articolul 338 ³ . Culegerea neautorizată de informații;
	Articolul 341. Chemările la răsturnarea sau schimbarea prin violență a orânduirii constituționale a Republicii Moldova;
	Articolul 346 ² . Răspândirea materialelor cu caracter extremist;
Codul contravențional al Republicii Moldova [13]	Articolul 70. Calomnia;
	Articolul 70 ¹ . Instigare la discriminare;
	Articolul 70 ² . Hărțuirea;
	Articolul 71. Încălcarea legislației privind accesul la informație și cu privire la petiționare;
	Articolul 74 ¹ . Prelucrarea datelor cu caracter personal cu încălcarea legislației privind protecția datelor cu caracter personal;
	Capitolul XIV. Contravenții în domeniul comunicațiilor electronice și al comunicațiilor poștale;
	Articolul 364. Încălcarea legislației cu privire la publicitate;
	Articolul 365 ² . Secretizarea/desecretizarea neîntemeiată a informațiilor;
Legea privind libertatea de exprimare [14]	Legea garantează libertatea de exprimare, menținând echilibrul cu protecția onoarei, demnității, reputației și vieții private, fără a reglementa accesul la informații, dreptul la replică electorală și drepturile de autor.

Legea privind accesul la informațiile de interes public [15]	Legea reglementează exercitarea și apărarea dreptului de acces la informațiile de interes public, obligațiile furnizorilor, răspunderea pentru încălcări și mecanismele de control, fără a afecta reglementările speciale din alte legi; accesul la informațiile de mediu este stabilit de Guvern.
Legea privind secretul de stat [16]	Prin prisma dezinformării, Legea se referă la reglementarea acțiunilor ce țin de desecretizarea și modificarea cu rea intenție a secretelor de stat.
Strategia națională de dezvoltare „Moldova 2030” [17]	Cadrul normativ adiacent, orientat spre asigurarea unei dezvoltări durabile a Republicii Moldova prin consolidarea unei societăți informaționale veridice și reziliente, se numără: Strategia națională de dezvoltare „Moldova 2030”; Strategia de transformare digitală a Republicii Moldova pentru perioada 2023–2030; precum și Hotărârea Guvernului nr. 114 din 07.03.2023 privind aprobarea Strategiei de dezvoltare „Educația 2030” și a Programului de implementare aferent pentru anii 2023–2025.
Strategia de transformare digitală a Republicii Moldova pentru anii 2023-2030 [18]	
HG Nr. 114 din 07.03.2023 cu privire la aprobarea Strategiei de dezvoltare „Educația 2030” și a Programului de implementare a acesteia pentru anii 2023-2025 [19]	

În 2024, prin Ordinul comun al Ministerului Educației și Cercetării și Ministerului Culturii [20] Republica Moldova a fost adoptat Planul Interministerial de Alfabetizare Informațională și Media (AIM) pentru perioada 2024-2026, cu scopul de a crește accesul cetățenilor la surse veridice și oportunități de învățare formală și informală, începând de la educația timpurie. Astfel, au fost stabilite un set de *obiective și măsuri* divizate în trei mari arii de acțiune:

1. *Educație pentru media:*

- Introducerea educației media ca disciplină obligatorie în Curriculumul Național (primar, gimnazial, liceal).
- În universități, AIM este abordată sporadic, doar în cadrul programelor de jurnalism, istorie și filologie, fără o disciplină dedicată.

2. *Proiecte și platforme:*

- Site-uri de informare: Platforme precum Mediaticritica.md și Stopfals.md publică informații despre surse false, conturi malițioase și narative de dezinformare.
- Canalul „First Source”: Verificarea informațiilor și identificarea surselor de dezinformare.
- Ghiduri și fact-checking: Serviciul de Informații și Securitate (SIS) și Centrul pentru Jurnalism Independent (CJI) oferă ghiduri și colaborează cu organizații de fact-checking.

- EDMO FACT: Combinație de fact-checking, AI și cercetare pentru combaterea dezinformării în Moldova și Ucraina.
- Veridica.md: Platformă dedicată combaterii dezinformării.
- Prebunking prin M-MIIND: Proiect al International Media Support (IMS) și LetsData, care folosește AI pentru a detecta dezinformarea în stadii incipiente (în 36 de ore) și a livra informații corecte înainte de propagarea fake news-ului.

3. *Securitate informațională:*

- Revizuirea legilor privind securitatea informațională și media.
- Blocarea surselor de dezinformare (de exemplu, site-urile rusești) de către SIS.
- Monitorizarea spațiului online pentru detectarea campaniilor coordonate, axate pe securitate națională, manipulare electorală și propagandă geopolitică.

Desigur, există și câteva limitări în acest sens: activitățile sunt concentrate pe securitate națională, politică și alegeri, cu mai puțin accent pe problemele tinerilor (de exemplu, escrocherii online, conținut sexual manipulator etc.); lipsa măsurilor împotriva indivizilor din spatele conturilor false; educația media este opțională în școli, iar în universități este insuficient dezvoltată, limitând accesul la AIM calitativă; număr redus de inițiative pentru persoanele vârstnice.

În prezent, în era digitală tot mai multe persoane se documentează din mediul online și în mare parte, de pe rețelele de socializare. Narativele de dezinformare cu specificații locale ale Republicii Moldova se concentrează pe două mari direcții: (1) exploatarea vulnerabilităților istorice (folosirea nostalgiei după URSS, manipularea relațiilor interetnice dintre români și ruși, exploatarea fricii de schimbări culturale); (2) adaptarea contextului geopolitic (promovarea narativelor pro-rusești prin politicienii locali, exploatarea problemelor economice pentru a critica orientările occidentale, demonizarea procesului de integrare UE etc.) [21,22].

Mecanismele tehnice de detectare a dezinformării cu ajutorul AI se bazează pe: (1) *Natural Language Processing* (NLP). Sistemele AI analizează componentele textului. *AI sentiment analysis* este cunoscută și sub denumirea de extragere a opiniilor, fiind un proces care aplică AI pentru a identifica și clasifica tonul emoțional exprimat în text. Aceasta ajută companiile să înțeleagă opiniile clienților, tendințele pieței și reputația mărcii prin analizarea datelor text precum recenzii, postări pe rețelele sociale și sondaje. Această analiză poate dezvălui dacă sentimentul este pozitiv, negativ sau neutru, oferind informații valoroase pentru diverse aplicații. Modelele AI pot fi părtinitoare dacă datele de antrenament nu sunt reprezentative pentru populație. Gradul de acuratețe: 76-88% în cazul textelor false identificate anterior; (2) *Analiza Multimedia*. Deepfake-urile sunt detectate prin analiza biometriei video-urilor, clipit nenatural, iluminare inconsistentă, forensica imaginilor prin mijloace de metadate și pixel artefacte, sincronizare audio-video. Rata de succes: 85% în cazul manipulărilor standard, scade drastic în cazul AI generativ nou; (3)

Analiza Comportamentală. Cartografierea propagării știrilor pe multiple platforme, detectarea boților, postare repetitivă, sincronizare ± 2 minute, identificarea campaniilor coordonate prin template-uri comune și mesaje duplicate. Acuratețe boți: 92% în cazuri simple [23, 24, 25].

Unelte precum ChatGPT, Claude, Perplexity, Gemini și Grok folosesc modele de limbaj mari (LLM), iar accesul la sursele externe le poate permite descoperirea știrilor false sau a dezinformării. În urma analizei acestor instrumente s-a constatat:

- *Procesarea Limbajului Natural*
 - Detectarea inconsecvențelor stilistice și lexicale: ChatGPT/GPT-4 analizează coerența argumentelor și frecvența cuvintelor-cheie asociate dezinformării;
 - Alegerea surselor și cross-referencing: Perplexity AI folosește căutare web în timp real și citează surse pentru verificare directă, reducând riscul de „halucinații”;
 - Semantic matching: Claude compară afirmațiile cu baze de date fact-checking pentru a marca teză-verdict type, semnalând date neconfirmate;
- *Analiza rețelelor de informații*
 - Graph analysis: Grok monitorizează propagarea informațiilor, identificând tendințe și diseminarea rapidă a conținutului suspect;
 - Bot detection: Sisteme specializate (ex. BotRGCN) analizează comportamente repetitive sau rate anormale de engagement pentru a detecta conturi automatizate.
- *Verificarea multimodală*
 - Deepfake detection: Claude și Gemini integrează tehnici de analiză video, detectând anomalii precum clipitul nenatural sau artefacte pixel;
 - Forensic imaging: ChatGPT poate folosi extensii precum PhotoDNA sau Error Level Analysis (ELA) pentru a identifica manipulări în imagini;
- *Uncertainty Quantification (UQ, cuantificarea incertitudinii)*
 - GPT-4o și Claude folosesc dropout și ensemble methods pentru a estima încrederea. Răspunsurile sub un prag (de ex. 0.85) sunt marcate „verificare manuală necesară”.
- *Învățare din feedback*
 - Mecanismul de reinforcement learning: Claude se adaptează prin corecții de la fact-checkeri, reducând erorile;
 - Interfață colaborativă: Perplexity permite utilizatorilor să confirme/respingă răspunsurile, ajustând modelul în timp real.

Din analiza de mai sus pot fi evidențiate următoarele limitări comune: (1) Halucinații: rata de fabulație variază între 3% (GPT-5 estimat) și 40% (GPT-3.5); Bias-uri de antrenare: modelele pot reflecta prejudecăți din datele de training; (3) Necesită verificare umană: scorurile de incertitudine UQ (Uncertainty Quantification) și feedback-ul live reduc dar

nu elimină complet rezultatele false. În practică, Perplexity AI este cel mai robust pentru detectarea știrilor false datorită accesului live la web și citării transparente, în timp ce ChatGPT și Claude dispun de capabilități avansate de procesare a limbajului natural (NLP) și de cuantificare a incertitudinii (UQ). Gemini excelează în contextul Knowledge Graph, iar Grok necesită îmbunătățiri pentru reducerea amplificării dezinformării.

Performanța sistemelor de detectare a fake news-urilor axate pe utilizarea AI sunt reflectate în tabelul 1.

Tabelul 1. Performanța și limitările sistemelor de detectare a dezinformării cu utilizarea AI

Sistem	Acuratețe	Context
NLP text basic	76%	Detectare text fals standard
Ensemble methods	99.8%	Combinații algoritmi multipli
Deepfake detection	85%	Video manipulare
Bot detection	92%	Conturi automatizate
Cross-platform tracking	65%	Migrare narrative

Detectarea dezinformării prin AI se confruntă cu obstacole complexe, care limitează eficiența sistemelor actuale și necesită soluții inovatoare. Dintre cele mai vizibile *limitări tehnologice* ale sistemelor pot fi enumerate:

- *Viteza de propagare*: Conținutul fals se răspândește de șase ori mai rapid decât cel autentic, ceea ce face dificilă intervenția în timp real, mai ales pe platformele sociale dinamice.
- *Lipsa datelor regionale*: Dataset-urile pentru limbile regionale, cum ar fi româna sau rusa vorbită în Moldova, sunt insuficiente, reducând acuratețea modelelor AI în contexte locale. De exemplu, calcurile lingvistice ruso-române sunt adesea interpretate greșit de modelele globale.
- *Deepfake-uri avansate*: Progresele în AI generativ produc deepfake-uri tot mai realiste, care sfidează tehnicile actuale de detectare, cum ar fi analiza biometrică sau a artefactelor de pixeli.
- *Complexitate multimodală*: Dezinformarea combină texte, imagini și videoclipuri, necesitând algoritmi capabili să proceseze simultan multiple formate, ceea ce crește complexitatea computațională.

Limitările opționale se reduc, în mare parte, la următoarele:

- *Migrarea între platforme*: Dezinformarea se mută rapid de pe o platformă pe alta (de exemplu, de la TV la Telegram, TikTok sau Facebook), reducând eficiența sistemelor care monitorizează o singură platformă.
- *Reapariția rapidă a clonelor*: Site-urile blocate pentru dezinformare sunt înlocuite cu clone noi în 24-48 de ore ocolind măsurile de control.

- *Context cultural*: Nuanțele culturale specifice, cum ar fi referințele locale din Moldova, sunt greu de captat de modelele AI globale, ceea ce duce la erori de interpretare.

O altă limitare a sistemelor AI sunt *limitările sociale*:

- *Dificultăți de percepție*: În Moldova 61% dintre cetățeni întâmpină probleme în a distinge informațiile false de cele reale, ceea ce amplifică impactul dezinformării.
- *Percepția de părtinire*: Fact-checking-ul este adesea considerat părtinitor în comunități polarizate, reducând încrederea în rezultatele AI.
- *Efectul de amplificare*: Detectarea inadecvată poate atrage atenția asupra conținutului fals, amplificându-i răspândirea în loc să o oprească.

Concluzionând, putem afirma că soluțiile inovatoare pentru combaterea dezinformării pot fi rezumate astfel:

- *Cuantificarea incertitudinii (UQ)*: Tehnicile precum Monte Carlo Dropout evaluează încrederea predicțiilor AI. Cazurile incerte (scor sub 0,85) sunt trimise spre verificare umană, crescând acuratețea cu 12% și reducând erorile;
- *Prebunking vis-a-vis Debunking*: Prebunking-ul educă publicul în avans pentru a respinge dezinformarea. În Moldova, campaniile, din 2024, au redus răspândirea conținutului fals cu 45% prin explicarea tacticilor manipulative;
- *Integrare Cross-Platform*: Algoritmii monitorizează dezinformarea pe platforme precum Telegram și TikTok, folosind analiza grafurilor pentru a detecta rețelele de distribuție și a interveni rapid;
- *Învățare continuă*: Modelele AI, precum Claude, folosesc feedback-ul uman pentru a-și ajusta predicțiile, reducând erorile prin învățare continuă și reinforcement learning (învățare prin întărire);
- *Tehnologii multimodale*: Sistemele integrează analiza textului, imaginilor și videoclipurilor, detectând inconsistențe (de exemplu, deepfake-uri) prin corelarea datelor din surse multiple.

În concluzie și în contextul celor elucidate mai sus, considerăm necesară crearea unui sistem integrat de detectare a dezinformării cu aplicarea inteligenței artificiale. Sistemul va integra procesarea multimodală, adică va trebui să proceseze simultan text prin modele BERT-RoBERTa adaptate pentru limba română și rusă, cu specializare pe narative moldovenești. În același timp, pentru analiza informațiilor video se poate utiliza tehnologia ViViT cu verificare biometrică pentru detectarea manipulărilor, iar pentru imagini se vor combina rețele neuronale cu tehnici forensice avansate - pentru a identifica manipulări timpurii. Motorul de recunoaștere a pattern-urilor va utiliza Rețelele Neuronale pe Grafuri pentru a analiza conturi false, distribuție cross-platform (Facebook, Telegram, TikTok) și relații semantice între narative, detectând campaniile coordonate. Gradul de încredere este calculat prin metode Monte Carlo, trimițând doar cazuri sub 85% spre validare umană și,

astfel, optimizând resursele. Platforma colaborativă permite fact-checkerilor să eticheteze date noi, îmbunătățind sistemul prin reinforcement learning continuu. Detectarea precoce (la 0.01% volum) va genera mesaje preventive personalizate, reducând propagarea fake news-urilor cu 50%. Avantajele competitive vis-a-vis de sistemele existente includ: scalabilitate multimodală, flexibilitate lingvistică/geopolitică, eficiență în minimizarea falselor alarme, proactivitate prin prebunking și colaborare unificată. Planul de implementare cuprinde patru etape: (1) colectarea datelor pentru adaptarea modelelor axate pe inteligența artificială, (2) adaptarea modelelor, (3) dezvoltarea Rețelele Neuronale pe Grafuri, (4) extindere API (Application Programming Interface). Evaluarea critică relevă inovație tehnică holistică, relevanță contextuală pentru vulnerabilitățile moldovenești, dar și provocări precum complexitate tehnică, acces la date și platforme cât și riscuri etice (cenzură, responsabilitate algoritmică). Abordarea graduală prin parteneriate locale oferă sustenabilitate. Astfel, acest sistem promite o paradigmă proactivă eficientă, iar în calitate de pas următor, considerăm necesară crearea unui model pedagogic de alfabetizare informațională și media contribuind organizat la detectarea dezinformării în medii publice pentru a crește reziliența societală în Moldova.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia dezvoltării unui model integrat de detectare și combatere a dezinformării în Republica Moldova: abordare tehnologică și socio-educțională”, obținut în baza rezultatelor concursului național de proiecte de cercetare și inovare ”Stimularea excelenței cercetărilor științifice pentru anii 2025-2026”, aprobat prin Decizia Consiliului Agenției Naționale pentru Cercetare și Dezvoltare nr. 04 din 22.07.2025 și Ordinul ANCD nr. 19-PC din 22.07.2025, din cadrul Priorității strategice IV: Provocări societale, cu cifra 25.80012.0807.65SE.

Bibliografie

1. Grupurile vulnerabile și marginalizate în raport cu mass-media: acces, consum și alfabetizare media. Online: <https://cji.md/grupurile-vulnerabile-si-marginalizate-in-raport-cu-mass-media-acces-consum-si-alfabetizare-media-2025/>
2. Jurnalism, ‘fake news’ & dezinformare. Manual pentru educația de media și învățământul jurnalistic. Organizația Națiunilor Unite pentru Educație, Știință și Cultură, Universitatea din București, 2021. Online: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000376919>
3. CRAVCENCO-ZAHARIA, L. Contracararea dezinformării în Republica Moldova. Online: https://freedomhouse.org/sites/default/files/2022-12/fh-pb_18-Society-wide-Battle-Against-Disinformation_Rom-v3.pdf
4. #PEÎNȚELES. „Disinformation”, „misinformation”, „malinformation” – care este diferența? Online: <https://mediacritica.md/peinteles-disinformation-misinformation-malinformation-care-este-diferenta/>

5. Constituția Republicii Moldova. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=145723&lang=ro#
6. Codul serviciilor media audiovizuale al Republicii Moldova. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=131836&lang=ro
7. Legea nr. 242 din 31.07.2023 privind Centrul pentru Comunicare Strategică și Combatere a Dezinformării și privind modificarea unor acte normative. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=138661&lang=ro
8. Legea nr. 48 din 16.03.2023 privind securitatea cibernetică. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=147961&lang=ro#
9. Legea securității statului nr. 618/1995. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=142091&lang=ro#
10. Legea nr. 120/2017 privind prevenirea și combaterea terorismului. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=142802&lang=ro#
11. Strategia securității naționale a Republicii Moldova. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=141253&lang=ro#;
12. Codul penal al Republicii Moldova. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=149992&lang=ro#
13. Codul contravențional al Republicii Moldova. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=150003&lang=ro#
14. Legea privind libertatea de exprimare. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=141515&lang=ro#
15. Legea privind accesul la informațiile de interes public. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=137908&lang=ro
16. Legea privind secretul de stat. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=135512&lang=ro#
17. Strategia națională de dezvoltare „Moldova 2030”. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=134582&lang=ro#
18. Strategia de transformare digitală a Republicii Moldova pentru anii 2023-2030. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=139408&lang=ro
19. HG Nr. 114 din 07.03.2023 cu privire la aprobarea Strategiei de dezvoltare „Educația 2030” și a Programului de implementare a acesteia pentru anii 2023-2025. Online: https://www.legis.md/cautare/getResults?doc_id=139408&lang=ro#
20. [Ordinul comun Ministerului Educației și Cercetării și Ministerului Culturii nr.701/174 din 17.05.2024 Cu privire la aprobarea Planului interministerial de integrare a acțiunilor de Alfabetizarea Informațională și Media \(AIM\) în planurile de acțiuni ale instituțiilor de stat relevante pentru anii 2024-2026.](#)
21. MÂRZAC, E., PANȚA, R., SANDU, S. Analiza dezinformării prezente în spațiul online al Republicii Moldova privind activitatea NATO și UE. Online:

<https://pisa.md/wp-content/uploads/2024/11/ANALIZA-DEZINFORMARII-PREZENTE-IN-SPATIUL-ONLINE-AL-REPUBLICII-MOLDOVA-PRIVIND-ACTIVATEA-NATO-SI-UNIUNEA-EUROPEANA-1.pdf>

22. CENUȘA, D. Russian Narratives and Resilience to Disinformation in Moldova. Russian Analytical Digest, 313, 2024, p.6-10. Online: https://www.ssoar.info/ssoar/bitstream/handle/document/101374/ssoar-russanald-2024-313-cenusa-Russian_Narratives_and_Resilience_to.pdf?sequence=1&isAllowed=y&lnkname=ssoar-russanald-2024-313-cenusa-Russian_Narratives_and_Resilience_to.pdf
23. SHU, K., SLIVA, A., WANG, S., TANG, J., LIU, H. Fake News Detection on Social Media: A Data Mining Perspective. In: *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 2017. 19(1), 22-36. Online: <https://doi.org/10.1145/3137597.3137600>
24. LAZER, D. M. J., et al. The Science of Fake News. In: *Science*, 359(6380), 1094–1096. 2018. Online: <https://doi.org/10.1126/science.aao2998>
25. Meta's Approach to Misinformation. Meta Platforms, Inc. (2024). Online: <https://transparency.meta.com>

UDC: 51:004.421.2:37.091.3

MATEMATICA – PREMISĂ ESENȚIALĂ PENTRU DEZVOLTAREA COMPETENȚEI DE PROGRAMARE

Angela GLOBA, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-2653-0320>

e-mail: globa.angela@upsc.md

Ala GASNAȘ, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-7174-7027>

e-mail: gasnas.ala@upsc.md

Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. În articol se demonstrează importanța competenței matematice pentru dezvoltarea competențelor digitale, în particular – competența de programare. Sunt aduse argumente referitor la utilizarea matematicii în realizarea codurilor de program prin aplicarea tehnicii programării dinamice. Este propusă analiza unei probleme de concurs prin prisma matematicii și a tehnicii programării dinamice. Articolul evidențiază, astfel, necesitatea formării integrate a competențelor STEM, susținând ideea că performanța în programare nu poate fi atinsă fără o bază matematică solidă.

Cuvinte cheie: competențe în domeniul științei, tehnologiei, ingineriei și matematicii, competențe digitale, competența de a programa, tehnici de programare, programare dinamică, complexitate algoritmică.

MATHEMATICS – A KEY FOUNDATION FOR DEVELOPING PROGRAMMING COMPETENCE

Abstract. The article demonstrates the importance of mathematical competence in the development of digital skills, particularly programming competence. It presents arguments regarding the use of mathematics in writing program code through the application of dynamic programming techniques. The analysis of a competition problem is proposed from the perspective of mathematics and dynamic programming. The article underscores the necessity of integrated STEM education, arguing that programming performance is unattainable without a strong foundation in mathematics.

Keywords: mathematical competence and competence in science, technology, engineering, digital competence, programming competence, programming techniques, dynamic programming, algorithmic complexity.

Cadrul european de referință privind competențele-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții include sub numărul trei *competențele în domeniul științei, tehnologiei, ingineriei și matematicii*, iar sub numărul patru – *competențele digitale*. Conform acestui document „competențele matematice presupun capacitatea de a gândi logic și de a aplica raționamentele matematice pentru a face față diverselor provocări și probleme din viața cotidiană. Ele nu se limitează la calcule, ci includ înțelegerea proceselor, aplicarea cunoștințelor și utilizarea unor instrumente specifice: formule, modele, grafice sau diagrame pentru a interpreta și soluționa situații din viața reală. La baza acestor competențe stă o bună stăpânire a noțiunilor matematice, combinată cu disponibilitatea de a gândi în

termeni matematici. Aceste cunoștințe includ numerele, măsurile și structurile, operațiile și prezentările matematice de bază etc. Înțelegerea termenilor și conceptelor matematice, comunicarea într-un limbaj matematic cât și utilizarea instrumentelor ajutătoare corespunzătoare (date statistice, grafice etc.) contribuie la înțelegerea aspectelor matematice ale digitalizării” [1]. Competențele digitale includ, prin definiție, și *competența de a programa*. Evident, nu este o noutate că pentru crearea codului de program sunt necesare abilități și cunoștințe din diverse materii, iar unele dintre cele mai importante sunt competențele matematice. Translarea problemei din limbaj natural în limbaj terminologic, adică construirea modelului problemei, cere de la instruit cunoașterea clară și temeinică a noțiunilor matematice: mulțimi numerice, axă numerică, egalități numerice, ecuații, inecuații, funcții, elemente de geometrie în plan și spațiu etc. Reprezentările matematice, cum ar fi funcțiile, matricele sau grafurile, facilitează modelarea abstractă a problemelor complexe și implementarea soluțiilor algoritmice. Capacitatea de a utiliza raționamentul matematic ajută la identificarea modelelor și a relațiilor dintre date, aspecte esențiale pentru optimizarea timpului de execuție și a spațiului de memorie [2].

Este cunoscut că, tehnica programării dinamice se utilizează pentru rezolvarea problemelor de optimizare sau de decizie, prin descompunerea acestora în subprobleme mai mici, suprapuse, permițând reducerea complexității computaționale față de soluțiile recursiv-exponențiale. Astfel, pentru aplicarea tehnicii programării dinamice avem nevoie de identificarea principiului de optimalitate, care nu este altceva decât o funcție, un sistem de ecuații/ inecuații realizarea iterativă/recursivă a căroră conduce la obținerea soluției optime. Cu alte cuvinte, matematica oferă fundamentele logice și structurale necesare pentru a identifica substructura optimă a unei probleme, esențială în programarea dinamică. De asemenea, formularea unei probleme în termeni matematici permite descompunerea ei în relații de recurență, care stau la baza abordării dinamice. În același timp, prin analiza matematică, se pot demonstra proprietățile de corectitudine și eficiență ale soluției obținute prin aplicarea tehnicii programării dinamice [3, 4].

Să analizăm problema *Iluminare* (Olimpiada Republicană de Informatică, Republica Moldova, 2024): De-a lungul unui bulevard, pe mijloc, au fost instalați n piloni pentru iluminare stradală. Distanța dintre piloni este de 5 metri. Așa cum, lămpile instalate au intensitatea de iluminare p_i ($1 \leq p_i \leq 10$) și consumă $100 \cdot p_i$ watt, responsabilii de iluminarea stradală s-au gândit cum ar putea economisi energia electrică. Astfel, ei au analizat următoarele situații: (1) fiecare pilon are o lampă care iluminează o porțiune de bulevard de forma unui disc cu raza p_i ; (2) trebuie iluminată nu neapărat toată suprafața bulevardului, dar, cel puțin, o fâșie cu lățimea $d > 0$ pe care să se poată deplasa pietonii; (3) există posibilitatea de a nu conecta la energie electrică toți pilonii (figura 1).

Sarcină: Elaborați un program care le-ar permite responsabililor de iluminarea stradală să calculeze consumul minim de energie electrică și fâșia de bulevard care va fi iluminată integral.

Date de intrare: Intrarea standard conține pe prima linie un număr natural n care indică numărul de piloni instalați pe bulevard. Pe următoarele n linii a intrării standard se vor citi numerele p_i ($i=1,2,...,n$) care reprezintă intensitatea de iluminare a lămpilor.

Date de ieșire: Ieșirea standard va conține pe prima linie un număr natural E – consumul total de energie electrică în watt; pe a doua linie se va afișa numărul d , care se obține prin trunchierea numărului d .partea_fracționară (de exemplu, pentru numărul 2.36758492 se va afișa 2); dacă $d=0$, atunci se va afișa pe o singură linie mesajul 'SCHIMBATI LAMPILE'.

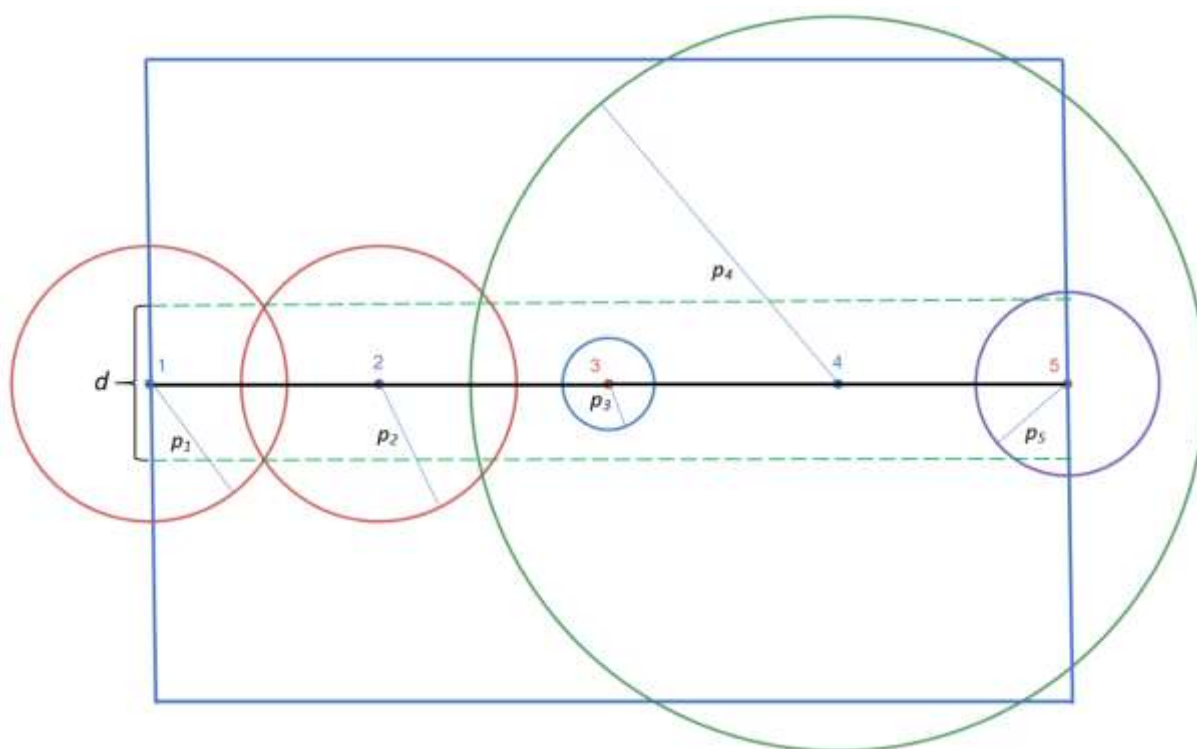


Figura 1. Problema Iluminare. Prezentare grafică

Restricții: $1 \leq n \leq 50$, $1 \leq p_i \leq 10$. Timp de execuție: 2 secunde. Datele de intrare admit o singură soluție.

Exemple:

Intrare	Ieșire
<i>Exemplul 1.</i>	
5	1500
3	3
3	
1	
9	
2	

Exemplul 2.	
5	SCHIMBATI LAMPILE
3	
1	
1	
8	
2	

Rezolvare:

De regulă, problemele de concurs presupun o simbioză dintre fundamentele matematice solide îmbinate cu structuri de date sofisticate cât și aplicarea tehnicilor de programare avansate, de exemplu – programarea dinamică [5]. Această problemă, la fel, nu este o excepție.

De fapt, problema *Iluminare* poate fi catalogată, după tip, în problemă de *geometrie computațională*, iar după abordare – problemă din *categoria tehnicilor de programare*, în particular – *tehnica programării dinamice*.

Care sunt noțiunile matematice pe care trebuie să le posedă elevul pentru a rezolva această problemă? Vom identifica noțiunile din algebră și geometrie. Astfel:

Algebră: În primul rând, se va lucra cu numere naturale și întregi. De asemenea, elevul ar trebui să-și dea seama, din condiția problemei, că va lucra cu numere reale (pentru al calcula pe d). Evident, trebuie să cunoască operațiile aritmetice pe mulțimile N , Z , R , noțiunea de modulul unui număr, radicalul, mulțime, submulțime, operații cu mulțimi.

Geometrie: Noțiunile din geometrie necesare pentru rezolvarea problemei *Iluminare* sunt mult mai multe. Acestea sunt: axă numerică, sistem de coordonate, punct, linie, dreaptă, segment, cerc, disc, ecuația cercului, ecuația dreptei, distanța dintre două puncte, calcularea punctelor de intersecție a două cercuri, intersecția unui cerc cu axele de coordonate, apartenențe unui punct la un segment, noțiune de simetrie etc.

Construind modelul matematic, problema *Iluminare* poate fi formulată astfel: Se dă o mulțime din n elemente. Să se determine o submulțime a acestei mulțimi care respectă un set de proprietăți. Adică, problema se reduce la rezolvarea problemei rucsacului care implică generarea submulțimilor unei mulțimi. Așa cum, $n=50$, iar numărul de submulțimi ale unei mulțimi este $2^{50} = 1125899906842624 \approx 10^{15}$, atunci generarea tuturor submulțimilor și analiza lor va conduce la un timp de calcul exagerat.

Problema se rezolvă aplicând tehnica programării dinamice, metoda înapoi, care permite rezolvarea problemei în n etape. Esența algoritmului constă în următoarele:

Pasul 1. Vom identifica datele și structurile de date pe care le vom utiliza pentru rezolvarea problemei. Se va defini o structură **vector** de tip tablou unidimensional de tip întreg. Vom declara variabilele **p**, **en** și **ultim** de tip **vector**, unde se vor memora: intensitatea de iluminare p_i ($1 \leq p_i \leq 10$); energia consumată dacă au fost conectați o parte din pilonii

de la 1 la n ; ultimul pilon care a fost adăugat la soluția posibilă. De asemenea, se va defini o structură **vector1** de tip tablou unidimensional de tip mulțime și se va declara variabila **pilon**, unde se vor memora numerele de ordine a pilonilor care pot forma o soluție posibilă. Din analiza datelor de intrare este clar că variabila **d** va fi de tip **real**. Pe noi ne interesează energia minimă consumată și valoarea lui **d**.

Pasul 2. Se vor inițializa structurile de date **en**, **pilon**, **ultim**:

```
pentru i=1 până la 10*n
    {pilon[i]=[];
     en[i]=0;
     ultim[i]=0;}
```

Pasul 3. Din analiza datelor inițiale se poate observa că pentru a obține o soluție posibilă validă (**d** $\neq$ 0) este necesar ca unul din pilonii 1 sau 2 să fie conectați la energia electrică.

Deci, vom avea:

```
en[p[1]]=p[1]; pilon[p[1]]=[]; ultim[p[1]]=1;
dacă p[2]>5 atunci
    {en[p[2]]=p[2];
     pilon[p[2]]=[];
     ultim[p[2]]=2;}
```

```
Intersect(1,2,q); //intersectăm discul 1 cu raza p[1] cu discul
2 cu raza p[2]; dacă discurile se intersectează, atunci q='i';
```

```
dacă q='i' atunci
    {en[p[1]+p[2]]=p[1]+p[2];
     pilon[p[1]+p[2]]=[];
     ultim[p[1]+p[2]]=2;}
```

Pasul 4. Vom analiza în continuare pilonii 3, ..., n . La fiecare dintre aceste etape se adaugă un nou pilon care are o lampă cu intensitatea de iluminare p_i și se memorează toate intensitățile de iluminare cumulate care pot fi formate cu pilonii 1,2,..., i . Aici se va ține cont de faptul că pilonul p_i poate fi adăugat numai dacă discul luminos descris de lampă se intersectează cu discul luminos descris de lampa ultimului pilon adăugat memorat în **ultim[j]**.

```
pentru i=3 până la n
    {j=1; q='c';
     cât timp j<=10*n
        {dacă ultim[j]<>0 atunci Intersect(ultim[j],i,q);
         dacă q='i' atunci
             {en[j+p[i]]=en[j]+p[i];
              pilon[j+p[i]]=pilon[j]+[i];
              ultim[j+p[i]]=i;
              q='c';}
```

```
j=j+1; } }
```

Pasul 5. Verificăm dacă soluția este finală, adică dacă discul luminos al ultimului pilon adăugat la soluție intersectează linia $x=5*(n-1)$. Pentru aceasta este necesar ca distanța de la ultimul pilon adăugat la soluție să fie mai mică decât $p[ultim[j]]$ sau poate fi aplicată secvența de instrucțiuni:

```
pentru j=1 până la 10*n  
{aux=25*sqr(n-ultim[j]);  
  dacă (ultim[j]<>0) and (ultim[j]<>n)  
    and (aux>=(p[ultim[j]])2) atunci ultim[j]=0; }
```

În cazul în care discul luminos al ultimului pilon adăugat nu intersectează dreapta $x=5*(n-1)$, atunci valoarea lui **ultim[j]** devine egală cu 0, adică această soluție posibilă nu poate fi soluție finală.

Pasul 6. Calculăm valoarea minimă a intensităților de iluminare cumulate, adică consumul minim de energie electrică:

```
min=1000;  
pentru i=1 până la 10*n  
{dacă (ultim[i]<>0) and (en[i]<min)  
  atunci {min=en[i]; poz=i; } }
```

Aici **poz** va fi egală cu valoarea minimă a consumului de energie electrică.

Pasul 7. Calculăm valoarea lui **d**. Numărul **d** se obține aflând punctele de intersecție dintre discurile luminoase descrise de pilonii selectați în soluție. Evident, se va alege valoarea minimă. Așa cum, soluția trebuie analizată în ordine crescătoare a numerelor de ordine a pilonilor, inițial, se va găsi primul pilon din soluție (evident, cum am scris mai sus, acesta poate fi pilonul 1 sau 2). Se vor calcula punctele de intersecție a discului luminos al primului pilon cu axa $\overline{OY}$. Așa cum discurile sunt simetrice în raport cu axa $\overline{OX}$, pentru calcularea punctelor de intersecție a două cercuri, este suficient să găsim coordonatele unui punct de intersecție $A(x, y)$, iar **d=2*y**.

```
i=1; w=true;  
cât timp ((i<=ultim[poz]) and w)  
{dacă i ∈ pilon[poz] atunci {k=i; w=false; }  
  i=i+1; }  
m1=k;  
d=2*√((p[m1])2-25*(m1-1)2);  
j=ultim[poz];  
d1=2*√((p[j])2-25*(n-j)2);  
dacă d1<d atunci d=d1;  
i=m1+1;  
repetă
```

```

m2=m1; w=true;
cât timp ((i<=ultim[poz]) and w)
    {dacă i ∈ pilon[poz] atunci {k=i; w=false;}
    i=i+1;}
m1=k;
temp=2*Punct(m1,m2);
dacă temp<d atunci d=temp;
i=m1+1;
până când i>ultim[poz];

```

Pasul 8. Se va scrie pe prima linie a ieșirii standard valoarea **min**, iar pe a doua linie numărul care se obține prin trunchierea valorii **d**.

Pasul 9. Dacă **min=1000**, atunci se va scrie 'SCHIMBATI LAMPILE', iar pașii 7 și 8 vor fi omiși.

Este cunoscut că două cercuri se pot intersecta în două puncte, pot fi tangente sau nu au puncte de intersecție. În acest caz, pentru a reduce timpul de calcul și volumul de memorie, nu este necesar să calculăm punctele de intersecție a două cercuri (deși, acest lucru este necesar pentru calcularea lui **d**). Este suficient să cunoaștem doar dacă acestea se intersectează:

```

Subprogram Intersect(a,b:întreg; t:caracter)
    {dacă ((a-b)*5+p[a])2<(p[b])2 and ((a-b)*5-p[a])2>(p[b])2
    atunci t='i' altfel t='z';

```

Pentru calcularea ordonatei punctului de intersecție a două cercuri se va aplica subprogramul:

```

Subprogram Punct(s,v:întreg):real;
    {x=((p[s])2-(p[v])2-25*((s-1)2-(v-1)2))/(10*(v-s));
    y=√((p[s])2-(x-5*(s-1))2);
    Punct=y;}

```

Evident, putem optimiza algoritmul prin introducerea unei variabile logice care ar determina dacă timp de două etape (adăugarea a doi piloni posibili) nu a fost adăugat nici un pilon la soluția posibilă, atunci este clar că **d = 0** și se va afișa mesajul 'SCHIMBATI LAMPILE'.

În caz general, problema admite mai multe soluții (figura 2). De exemplu, pentru datele de intrare:

Intrare

10
3
5
10
7
2

Ieșire

1500
3

1	
9	
2	
3	
5	

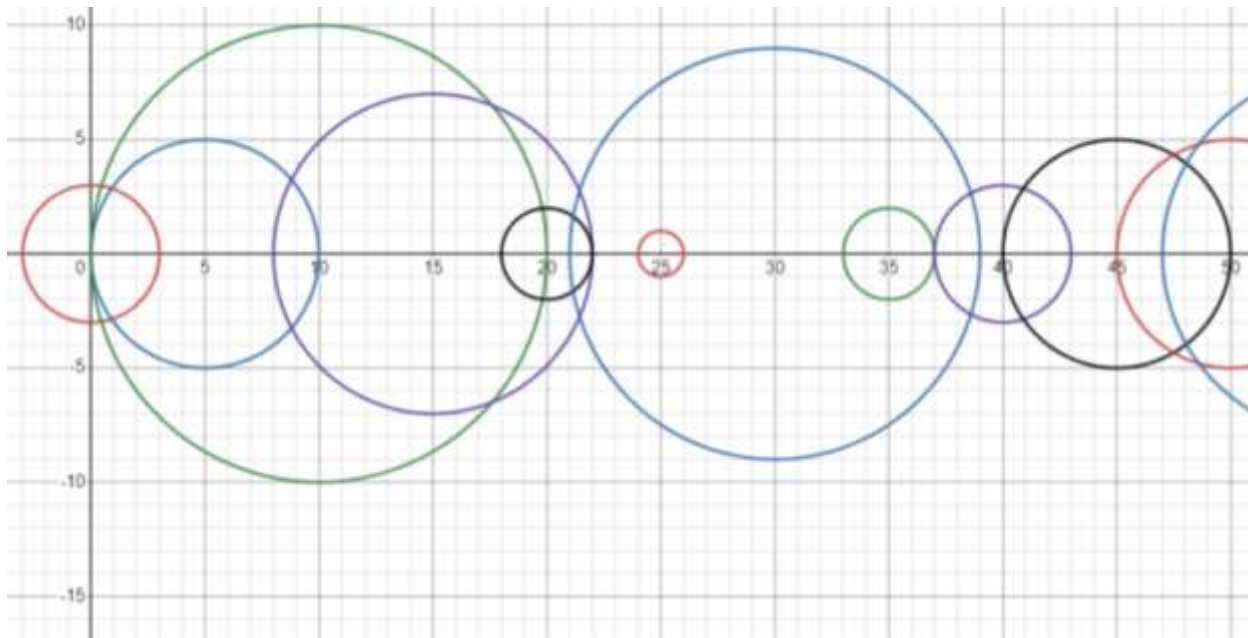


Figura 2. Problema Iluminare. Cazul când datele inițiale admit mai multe soluții

Dacă se va alege soluția: **3, 5, 10, 7, 2, 1, 9, 2, 3, 5**, atunci se va consuma 3200 watt, iar $d=5$. Dacă se va alege soluția: **3, 5, 10, 7, 2, 1, 9, 2, 3, 5**, atunci se va consuma 3200 watt, iar $d=3$.

Pentru *exemplul 1* din condiția problemei avem următoarea explicație: Analizând figura 3 se poate observa că conectarea pilonilor 3 și 5 nu are sens. Deci, se vor conecta pilonii 1, 2, 4 cu intensitatea de iluminare 3, 3, 9 respectiv. Obținem: $3+3+9=15$, $15 \cdot 100=1500$ watt. În acest caz $d=3$.

Vom exemplifica în continuare parcurgerea algoritmului de programare dinamică și obținerea soluțiilor parțiale și finale. Pentru aceasta, vom utiliza un tabel, unde pe prima linie sunt indicate valorile posibile ale sumei intensității de iluminare p_i ($1 \leq p_i \leq 10$). Putem aplica formula de calcul a consumului de energie electrică care va avea valoarea maximă egală cu $\sum_{i=1}^n p_i \cdot 100$. Pentru restricțiile din problemă, aceste valori vor fi cuprinse între 100 și 5000. Evident, nu este convenabil nici ca volum de memorie, nici ca timp de calcul, deși, există posibilități simple de optimizare. Așa dar, pentru datele din exemplul 1, valorile vor fi cuprinse între 1 și 50.

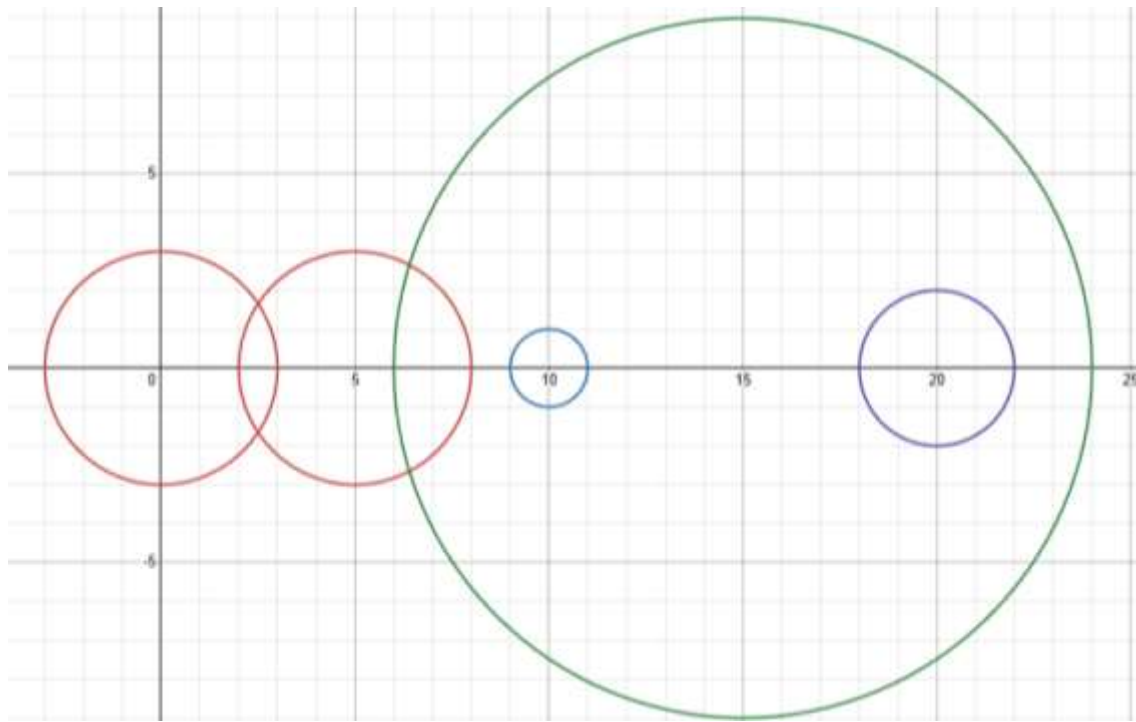


Figura 3. Problema Iluminare. Datele de intrare pentru exemplul 1

După inițializarea variabilelor **en**, **ultim**, **pilon**, obținem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	50
en	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pilon	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
ultim	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Se analizează pilonul 1 cu intensitatea $p[1] = 3$. Așa cum, primul pilon poate fi inclus în soluția posibilă, avem situația:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	50
en	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pilon	∅	∅	1	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
ultim	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Se va analiza pilonul 2 cu intensitatea $p[2] = 3$. Așa cum, $p[2] < 5$, este clar că nu putem avea o soluție parțială care începe cu pilonul al doilea. Se verifică dacă discurile luminoase ale pilonul 1 și pilonului 2 se intersectează. Așa cum, rezultatul furnizat de subprogramul `Intersect(1, 2, q)` pentru variabila q este 'i', atunci acest pilon poate fi adăugat la soluția posibilă. Se va obține următoarea stare a variabilelor structurate **en**, **ultim**, **pilon**:

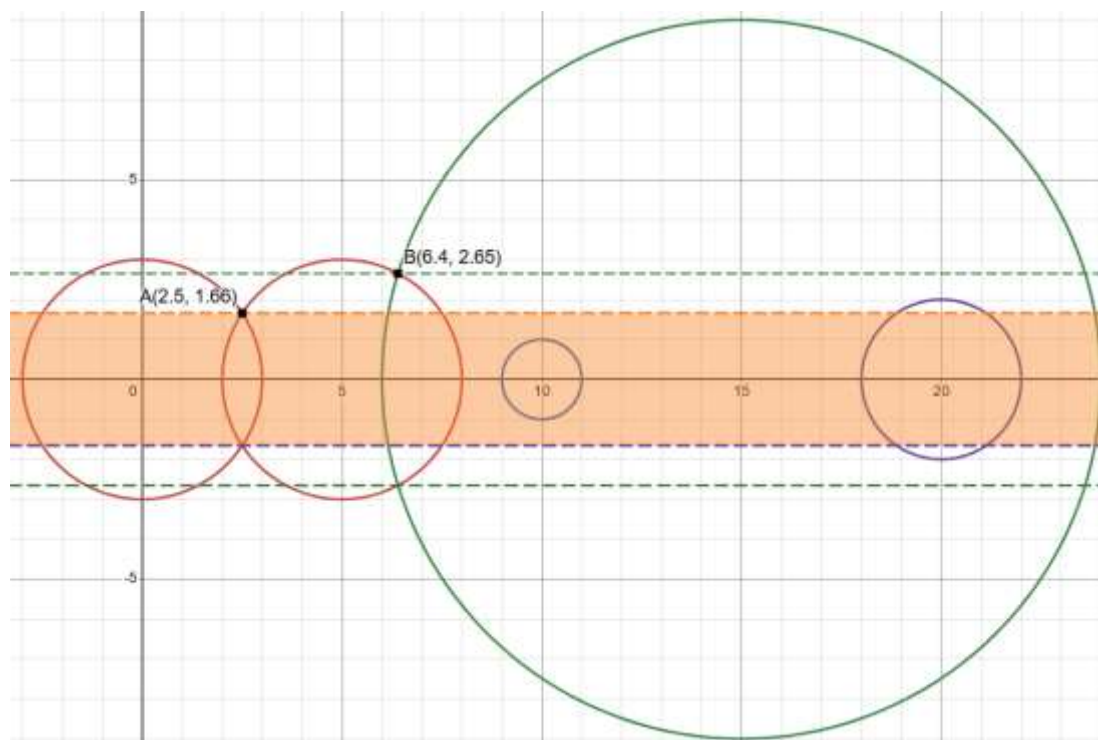
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	50
en	0	0	3	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pilon	∅	∅	1	∅	∅	{1, 2}	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
ultim	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Se va analiza pilonul 3 cu intensitatea $p[3]=1$. Se verifică dacă discurile luminoase ale pilonul 1 și pilonului 3 se intersectează. Rezultatul furnizat de subprogramul $\text{Intersect}(1, 3, q)$ pentru variabila q este 'z', adică el nu poate fi conectat după pilonul 1. Se verifică dacă discurile luminoase ale pilonul 2 și pilonului 3 se intersectează. Rezultatul furnizat de subprogramul $\text{Intersect}(2, 3, q)$ pentru variabila q este 'z'. Deci, acest pilon nu poate fi conectat nici după pilonul 2, iar starea variabilelor **en**, **ultim**, **pilon** rămâne neschimbată.

Se va analiza pilonul 4 cu intensitatea $p[4]=9$. Se verifică dacă discurile luminoase ale pilonul 1 și pilonului 4 se intersectează. Rezultatul furnizat de subprogramul $\text{Intersect}(1, 4, q)$ pentru variabila q este 'z'. Deci, acest pilon nu poate fi conectat după conectarea pilonului 1. Se verifică dacă discurile luminoase ale pilonul 2 și pilonului 4 se intersectează. Rezultatul furnizat de subprogramul $\text{Intersect}(2, 4, q)$ pentru variabila q este 'i'. În acest caz, acest pilon poate fi conectat după conectarea pilonului 2. Obținem următoarea stare a variabilelor **en**, **ultim**, **pilon**:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	50
en	0	0	3	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0
pilon	∅	∅	1	∅	∅	{1, 2}	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	{1, 2, 4}	∅	∅	∅
ultim	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0

Se va analiza pilonul 5 cu intensitatea $p[5]=2$. Evident, pentru fiecare caz analizat valoarea variabilei q va fi 'z'. Deci, starea variabilelor **en**, **ultim**, **pilon** va rămâne neschimbată.



**Figura 4. Problema Iluminare. Fâșia maximă iluminată de piloni
pentru datele din exemplul 1**

După verificarea finalității soluției se va obține:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	15	1	..	5
										0	1	2	3	4		6	.	0
en	0	0	3	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0
pilon	∅	∅	1	∅	∅	{1,2}	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	{1,2,4}	∅	∅	∅
ultim	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0

Din figura 4 ușor se vede că valoarea lui **d** este calculată corect.

Pentru *exemplul 2*, enunțat în condiția problemei, explicațiile sunt următoarele: Din figura 5 se observă clar că discul luminos al pilonului 2 nu se intersectează cu discul luminos al primului pilon și nici cu discul pilonului al treilea. Prin urmare, este necesar de schimbat alte lămpi, adică se va afișa mesajul 'SCHIMBATI LAMPILE'.

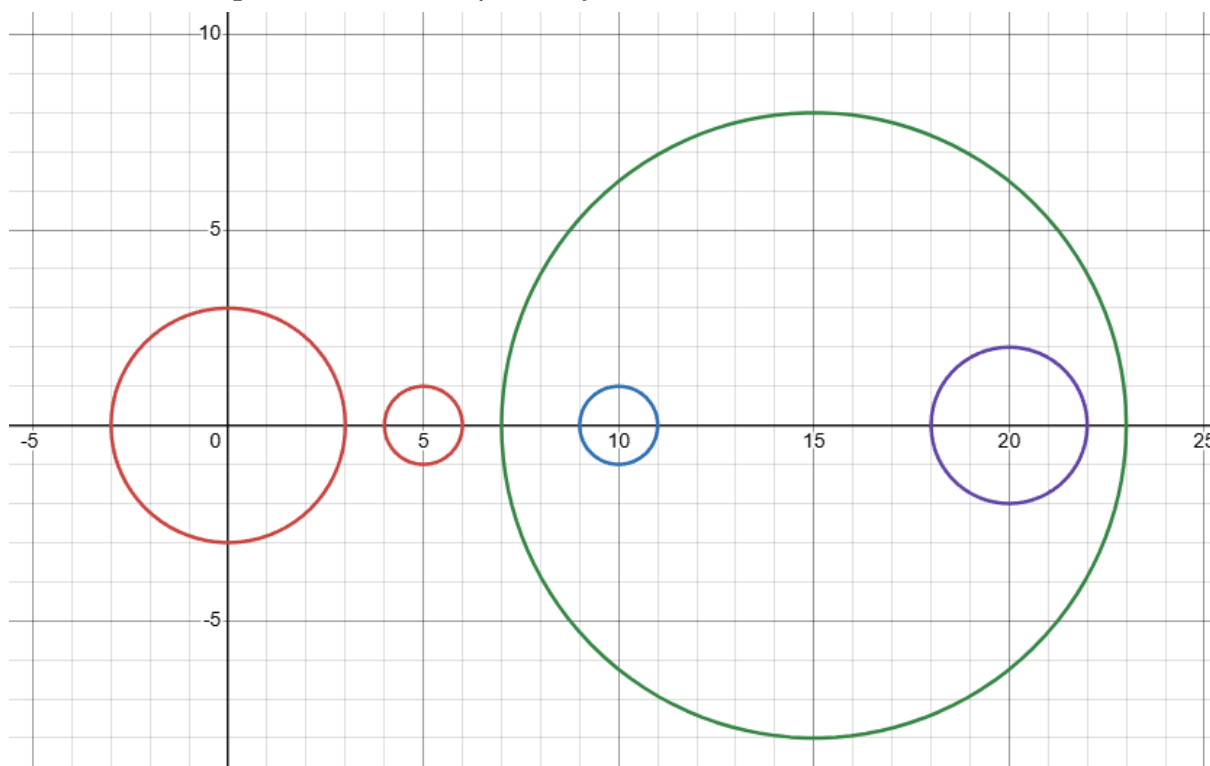


Figura 5. Problema *Iluminare*. Datele de intrare pentru exemplul 2

În concluzie, articolul demonstrează clar interdependența dintre competențele matematice și cele de programare, argumentând că o înțelegere profundă a conceptelor matematice este esențială pentru dezvoltarea competenței de programare. Translarea problemelor din limbaj natural în limbaj algoritmic necesită modelare matematică corectă, iar utilizarea tehnicii programării dinamice evidențiază importanța logicii matematice în optimizarea soluțiilor. Problema *Iluminare* a fost utilizată ca studiu de caz reprezentativ, fiind analizată atât din perspectivă geometrică, cât și algoritmică. S-a arătat că rezolvarea eficientă a acesteia implică atât cunoștințe din algebră și geometrie, dar și utilizarea raționamentului logic, ceea ce confirmă rolul fundamental al matematicii în gândirea computațională.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024.

Bibliografie

1. Council Recommendation of 22 May 2018 on key competences for lifelong learning (2018/C 189/01). *Official Journal of the European Union*. Online: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=LT](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=LT)
2. GLOBA, A., PAVEL, M., PAVEL, D. Importanța studierii proprietăților numerelor întregi în instruirea de performanță. În: *Proceedings of The 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics - CAIM 2022 dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Choban*, Chișinău, Republica Moldova, 25-27 august, 2022, p. 16-30.
3. COMANESCU, S., COMANESCU, M. (red. Valuță I.) Elemente de analiză calitativă a algoritmilor. Chișinău: Știința, 1988. 54 p.
4. КНУТ, Д. Искусство программирования для ЭВМ. т.1. Основные алгоритмы. Москва: Мир, 1976. 735 с.
5. GLOBA, A., GASNAȘ, A. Metodologia elaborării problemelor de concurs. În: *Mathematics & Information Technologies: Research and Education (MITRE-2023), International Conference. Satellite conference of the 10th Congress of Romanian Mathematicians*, Chișinău, June 26-29, 2023. Abstract. Chișinău, CEP USM, 2023, p. 102.
6. GLOBA, A., CORLAT, S. Didactic aspects regarding to creating test sets for competition problems. În: *Acta et Commentationes. Științe ale Educației. Revistă științifică* Nr.4(18) (2019). Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2019. p. 73-85. ISSN 1857-0623, E-ISSN 2587-3636.

UDC: 37.016:51(100)(073)

DESPRE STANDARDELE INTERNAȚIONALE ÎN EDUCAȚIA MATEMATICĂ: PROVOCĂRI ȘI SOLUȚII ÎN ADAPTAREA LOR LA SPECIFICUL LOCAL

Mihaela HAJDEU, dr., lect. univ.

<https://orcid.org/0000-0001-8189-7558>

e-mail: hajdeu.mihaela@upsc.md

Valeriu BORDAN, dr., conf. univ.

<https://orcid.org/0009-0008-4415-3750>

e-mail: bordan.valeriu@upsc.md

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”

Rezumat. Articolul evidențiază rolul standardelor internaționale în educația matematică (PISA, TIMSS, CCSSM) ca instrumente pentru dezvoltarea competențelor esențiale, precum gândirea critică, modelarea matematică și aplicarea cunoștințelor în contexte reale. În acest articol se subliniază importanța adaptării acestor standarde la specificul național, prin integrarea lor în curriculum, modernizarea metodelor de evaluare și utilizarea tehnologiilor digitale. Totodată, sunt menționate provocările în implementare a acestor standarde la nivel local.

Cuvinte-cheie: educație matematică, standarde internaționale, PISA, TIMSS, CCSSM, competențe, curriculum, adaptare, modelare matematică, evaluare.

ABOUT INTERNATIONAL STANDARDS IN MATHEMATICS EDUCATION: CHALLENGES AND SOLUTIONS IN ADAPTING THEM TO LOCAL SPECIFICITY

Abstract. The article highlights the role of international standards in mathematics education (PISA, TIMSS, CCSSM) as tools for developing essential competencies such as critical thinking, mathematical modeling, and applying knowledge in real-life contexts. It emphasizes the importance of adapting these standards to national specificities by integrating them into the curriculum, modernizing assessment methods, and using digital technologies. The article also mentions the challenges in implementing these standards at the local level.

Keywords: mathematics education, international standards, PISA, TIMSS, CCSSM, competencies, curriculum, adaptation, mathematical modeling, assessment.

În contextul actual al globalizării și al schimbărilor rapide în societate, educația matematică este chemată să răspundă unor nevoi complexe, care depășesc transmiterea simplă a cunoștințelor. Accesul extins la informație, dezvoltarea gândirii critice și capacitatea de a rezolva probleme în diverse contexte devin competențe esențiale, promovate de numeroase cadre curriculare internaționale. În acest sens apariția și consolidarea unor **standarde educaționale internaționale** reflectă eforturile globale de armonizare a predării matematicii în funcție de cerințele unei societăți bazate pe cunoaștere.

Ce sunt standardele internaționale în educația matematică?

Standardele educaționale internaționale reprezintă un set de repere conceptuale și practice care definesc ceea ce ar trebui să cunoască, să înțeleagă și să fie capabili să facă elevii într-un anumit domeniu, la un anumit nivel de vârstă sau de formare. În educația matematică, aceste standarde vizează nu doar conținuturi (ex. algebră, geometrie, analiză matematică), ci și competențe transversale, precum raționamentul logic, modelarea matematică, comunicarea matematică și rezolvarea de probleme în contexte reale [1, p. 6].

Standardele internaționale în educația matematică propun o abordare centrată pe competențe și pe dezvoltarea unor deprinderi transferabile, cu accent pe aplicabilitatea matematicii în viața reală, pe modelare, argumentare și rezolvare de probleme deschise. Aceste direcții se aliniază și cu promovarea unei educații incluzive, echitabile și relevante, așa cum este enunțat în obiectivul 4 din Agenda 2030 a ONU – „*asigurarea unei educații de calitate pentru toți*” [2, p. 8]. Printre cele mai influente cadre internaționale care stabilesc astfel de standarde se numără:

- **CCSSM – Standardele comune de stat (SUA) pentru matematică (Common Core State Standards for Mathematics)** – elaborate în Statele Unite în anul 2010. Acestea oferă o structură coerentă pentru fiecare an de studiu, organizată pe **domenii conceptuale și practici matematice**. Accentul este pus pe coerență, progresie și gândire logică, aplicabilitate și profunzimea înțelegerii [3, p. 3].

Obiectivul competitivității internaționale: Să ajute elevii americani să fie mai competitivi la nivel internațional, prin alinierea standardelor la cele ale țărilor cu sisteme educaționale de top.

- **PISA – Programme for International Student Assessment** – un program inițiat de OCDE, care evaluează la fiecare trei ani capacitatea elevilor de 15 ani din întreaga lume de a aplica cunoștințele matematice în situații reale. PISA nu testează doar memorarea, ci mai ales **gândirea critică, raționamentul și capacitatea de transfer a cunoștințelor** [14].
- **TIMSS – Trends in International Mathematics and Science Study**, dezvoltat de IEA, TIMSS evaluează elevii de clasa a IV-a și a VIII-a, punând accentul pe cunoștințe și aplicarea lor în contexte familiare. Structura acestuia permite monitorizarea progresului educațional în timp și comparația între sisteme [5, p. 5].
- **Cadre curriculare naționale de referință** – cum ar fi cele din **Singapore, Finlanda** sau **Canada**, recunoscute internațional pentru performanțele lor în educația matematică, datorită unui echilibru între rigoarea teoretică și aplicabilitate, dar și pentru modul în care acestea dezvoltă metacogniția și autonomia elevilor [6, p. 4].

Scopul acestor standarde nu ține de uniformizarea globală a educației, ci de oferirea unui set de orientări validate științific, care să permită fiecărui sistem național să-și calibreze într-un anumit mod curriculumul, metodele de predare și de evaluare în raport cu

cerințele actuale. Ele oferă un cadru de referință pentru elaborarea politicilor educaționale naționale, dar și pentru profesori și autorii de manuale, contribuind astfel la o educație matematică relevantă, echitabilă și nu în ultimul rând, de calitate [7, p. 145].

Particularitățile de bază ale fiecărui standard internațional sunt ilustrate mai jos:

Tabel comparativ: Analiza standardelor internaționale în educația matematică

Criteriul	PISA (OCDE)	TIMSS (IEA)	CCSSM (SUA)
Publicul țintă	Elevi de 15 ani	Elevi de clasa a IV-a și a VIII-a	Clasele K–12 (grădiniță – clasa a XII-a)
Instituția	OECD – Organizația pentru Cooperare și Dezvoltare Economică	IEA – International Association for the Evaluation of Educational Achievement	CCSSO – Council of Chief State School Officers; NGA – National Governors Association
Obiectivul	Evaluarea capacității de a aplica matematica în viața reală	Evaluarea conținutului predat în școli și aplicarea lui în contexte cunoscute	Stabilirea unui curriculum coerent și progresiv , axat pe gândire matematică profundă
Accentul principal	Rezolvare de probleme în contexte personale, sociale, științifice	Conținuturi curriculare + procese cognitive	Practici matematice + coerență între ani + învățare profundă
Tipurile de competențe	Formularea, utilizarea și interpretarea matematicii în contexte reale [4, p. 20]	Cunoaștere, aplicație, raționament [5, p. 17]	Practici matematice esențiale (ex. argumentare, modelare, raționalizare abstractă) [3, p. 6]
Conținuturi evaluate	Cantități, variabile și relații, spațiu și formă, date și incertitudine [14, p. 15]	Numere, algebră, geometrie, date și probabilitate [5, p. 8]	Numere, operații, funcții, geometrie, date și statistici [3, p. 8]
Contextul evaluării	Probleme deschise, realiste, în contexte de viață: cumpărături, muncă, societate [4, p. 33]	Probleme școlare familiare, inspirate din manuale și exerciții de clasă [5, p. 20]	Situații școlare și aplicații modelate gradual, în funcție de vârstă [3, p. 15]
Structura de evaluare	6 niveluri de competență (de la nivel 1: bază, la nivel 6: performanță avansată) [4, p. 33]	3 domenii cognitive: cunoaștere, aplicație, raționament [5, p. 17]	Conținut + practici matematice (8 practici definite pentru toate nivelurile) [3, p. 6]
Orientarea curriculară	Evaluare standardizată la nivel internațional, dar independentă de curriculum național	Aliniere directă cu conținutul predat în școli	Curriculum național american unificat în statele participante

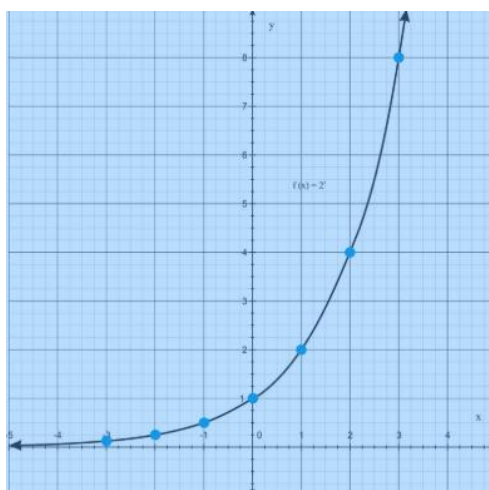
În continuare prezentăm un model de sarcină CCSSM:

Sarcină – CCSSM (Modelare matematică)

Context: *Economisirea energiei electrice în locuință*

Într-o locuință, consumul de energie electrică scade lunar în urma aplicării unor măsuri economice, conform tabelului și graficului:

Luna (x)	Consum (kWh)
0	500
1	450
2	405
3	365



Sarcină (Nivel „Depășirea așteptărilor”):

1. Scrie funcția exponențială de forma $f(x) = a \cdot b^x$ care să modeleze consumul lunar.
2. Utilizează funcția pentru a estima consumul după 6 luni.
3. Interpretează semnificația valorilor obținute și evaluează eficiența măsurilor de economisire.
4. Comentează dacă modelul rămâne realist pe termen lung sau dacă impune anumite ajustări.

Răspuns

1. **Determinarea parametrilor:** Inițial: $f(0) = a \cdot b^0 = a = 500 \Rightarrow a = 500$. Pentru $x = 1$, obținem: $450 = 500 \cdot b \Rightarrow b = 0,9$. Astfel $f(x) = 500 \cdot (0,9)^x$.
2. **Estimare pentru 6 luni:** $f(6) = 500 \cdot (0,9)^6 \approx 500 \cdot 0,531 \approx 265,5 \text{ kWh}$.
3. **Interpretare:**
 - Consumul se reduce cu aproximativ cu 47% în 6 luni, dovedind eficiență în economie.
 - Modelul arată că aplicarea măsurilor are impact semnificativ pe termen scurt.
4. **Evaluare pe termen lung:**
 - Pe termen mai lung, reducerea exponențială presupune valori irealiste (ex. sub 200 kWh lunar), deci modelul ar trebui ajustat după o anumită perioadă, luând în considerare limitările practice sau un prag minim de consum al energiei.

Această sarcină exemplifică **MP.4 – Modelarea matematică**: elevii identifică variabilele, formulează un model funcțional, interpretează rezultatele în context și comentează limitele modelului dat.

Sarcina implică și **MP.5 – Utilizarea strategică a instrumentelor adecvate**: folosirea graficelor sau a instrumentelor digitale pentru vizualizare și estimare.

Sarcinile de tipul PISA pun accentul pe aplicare și necesită interpretare nu doar a calculelor, ci și explicarea deciziilor. De asemenea sarcinile PISA sunt mai puțin

algoritmice, chiar dacă implică formule, elevii trebuie să aleagă și să interpreteze unele date. Pe de altă parte, însă, sarcinile TIMSS pun accentul pe programa școlară (verifică ce s-a predat), implică mai multe calcule, răspunsul, de cele mai dese ori, fiind unic și ușor de verificat.

Adaptarea standardelor internaționale în educația matematică la realitățile naționale implică un proces complex de ajustare a cerințelor globale la specificul local, instituțional și la mediul pedagogic corespunzător. Atât în Republica Moldova, cât și în România, există o tendință clară de aliniere parțială la standardele internaționale, în special în ceea ce privește competențele vizate și metodele moderne de evaluare. În continuare vom descrie unele aspecte ale acestor standarde la nivel local:

1. Alinierea curriculară și cadrul competențial

Curriculumul de matematică din Republica Moldova și din România a integrat, începând cu reformele din anii 2010, elemente esențiale din abordările promovate de PISA și TIMSS, în special în ceea ce privește:

- ✓ **Accentul pe competențe**, nu doar pe conținuturi (ex. formularea de probleme, modelare, argumentare) [8, p. 12];
- ✓ **Structura progresivă a învățării** cu obiective diferențiate pe niveluri de performanță [9, p. 16];
- ✓ **Evaluarea prin sarcini deschise** și aplicații în viața reală, inspirate din metodologia PISA [4, p. 41].

Exemplu: În curriculumul pentru gimnaziu din Republica Moldova, la clasa a VIII-a, sunt incluse sarcini de modelare matematică a unor probleme legate de consumul de energie sau gestionarea bugetului – competențe aliniate cu PISA, nivel 4 [8, p. 27].

2. Decalaj între intenție și practică (constrângeri sistemice)

Deși standardele internaționale oferă o direcție valoroasă, aplicarea lor integrală este adesea îngreunată de factorii sistemici, printre care:

- ✓ **Supraîncărcarea programei** cu conținuturi rigide în detrimentul timpului pentru explorare, aplicare și reflecție [10, p. 59];
- ✓ **Manuale centrate pe algoritmi** și mai puțin pe înțelegerea conceptuală;
- ✓ **Formări continue insuficiente** pentru profesorii de matematică în domeniul didacticii moderne și al evaluării competențelor [11, p. 323];
- ✓ **Resurse digitale și infrastructură didactică insuficientă**, în special în școlile rurale.

Acești factori generează un decalaj între obiectivele curriculare și implementarea acestora în clasă, unde predomină în continuare evaluarea sumativă și transmiterea algoritmică a rezolvării problemelor.

3. Adaptări viabile și bune practici

În ambele sisteme educaționale există inițiative promițătoare de adaptare contextualizată a standardelor internaționale:

- Utilizarea platformelor digitale precum **GeoGebra**, **Desmos** sau **Khan Academy** pentru dezvoltarea gândirii vizuale, exploratorii și aplicative [12, p. 11];
- Introducerea la olimpiadele școlare a problemelor de modelare și gândire critică, inspirate din structura sarcinilor PISA;
- Crearea unor teste de evaluare națională (ex. Testarea Națională 2024, Moldova) care includ sarcini aplicative, bazate pe înțelegerea fenomenelor cotidiene [13, p. 3].

Astfel de inițiative nu presupun copierea modelului PISA sau CCSSM, ci adaptarea creativă a acestora, în funcție de nevoile și ritmul de dezvoltare al fiecărui sistem național.

Implementarea standardelor internaționale în educația matematică precum PISA, TIMSS sau CCSSM oferă un cadru important pentru descentralizarea predării, pentru evaluarea competențelor curriculare și pentru dezvoltarea unei gândiri matematice cu caracter aplicativ. Fiecare cadru internațional vine cu avantajele sale distincte: PISA promovează modelarea și rezolvarea problemelor din viața reală, TIMSS se bazează pe conținutul predat efectiv și pe competențe cognitive specifice, iar CCSSM oferă o structură curriculară coerentă, orientată spre profunzime și practici matematice cu caracter integrativ.

Bibliografie

1. NISS, M. Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the PISA framework. In: *Roskilde: Roskilde University, IMFUFA Texts*, Nr. 485, 2011. 52 p. ISBN 978-87-7332-179-9.
2. UNESCO. *Education 2030: Incheon Declaration and Framework for Action for the implementation of Sustainable Development Goal 4 – Ensure inclusive and equitable quality education and promote lifelong learning opportunities for all*. Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 2015, p. 8. Disponibil online: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656>.
3. COUNCIL OF CHIEF STATE SCHOOL OFFICERS (CCSSO). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: CCSSO, 2010, 91 p. Disponibil online: <http://www.corestandards.org/Math/>.
4. OECD. *PISA 2022 Mathematics Framework*. Paris: OECD Publishing, 2022. (Număr de pagini și ISBN nespecificate.)
5. MULLIS, I. V. S., MARTIN, M. O., FOY, P., HOOPER, M. *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*. Amsterdam: IEA, 2019, 140 p. ISBN 978-1-889938-41-7. Disponibil online: <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/>.
6. TAN, C. *Education Policy in Singapore: A Review*. London: Routledge, 2021.
7. SCHOENFELD, A. H. What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? În: *Educational Researcher*, vol. 43, nr. 3, 2014, pp. 145–155.

8. MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA. *Curriculum național la matematică pentru învățământul primar, gimnazial și liceal*. Chișinău: Lyceum, 2018, 212 p. ISBN 978-9975-3258-0-6.
9. INSTITUTUL DE ȘTIINȚE ALE EDUCAȚIEI (ISE). *Repere metodologice pentru proiectarea competențială a curriculumului*. București: ISE, 2017.
10. NIEMI, H., LAVONEN, J. *Curriculum Reform in the Finnish Context*. Cham: Springer, 2021.
11. FREEMAN, S. et al. Active learning increases performance in STEM. În: *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, vol. 111, nr. 23, 2015, pp. 322–331.
12. MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII DIN ROMÂNIA. *Ghid de utilizare a platformelor digitale în învățământ*. București: MEC, 2020.
13. CENTRUL REPUBLICAN DE EVALUARE ȘI EXAMINARE. *Teste de antrenament pentru Evaluarea Națională la Matematică*. Chișinău: CREE, 2024. 120 p.
14. HAJDEU, M. *Relația dintre evaluările internaționale PISA și evaluările naționale de absolvire a gimnaziului privind manifestarea competenței matematice la elevi*. Fundația Soros Moldova. Chișinău: Tipografia „Lexon-Prim”, 2020. 43 p. ISBN 978-9975-3483-2-4.

UDC: 514.11

METODE ALTERNATIVE DE TRISECȚIE A UNGHIULUI

Ioana ILEANA, doctor, profesor

<https://orcid.org/0000-0003-0554-8748>

e-mail: ileana@colegiul-cantacuzino.ro

Colegiul Național Pedagogic „Constantin Cantacuzino” Târgoviște

Maria Crina DIACONU, doctor, lector

<https://orcid.org/0009-0006-3118-705X>

e-mail: maria.diaconu@upit.ro

Universitatea Politehnica București, Centrul Universitar Pitești

Rezumat. Trisecțiunea unghiului constituie una dintre cele mai cunoscute probleme clasice ale geometriei euclidiene, cu origini în Grecia antică, legată de provocarea de a împărți un unghi arbitrar în trei părți egale folosind doar rigla negradată și compasul. Deși imposibilitatea acestei construcții în formă generală a fost demonstrată riguros în secolul al XIX-lea, există metode alternative, bazate pe instrumente și concepte suplimentare, care permit realizarea acesteia. În acest articol sunt prezentate trei procedee notabile: metoda lui Arhimede, metoda lui Dürer și metoda lui Finsler, evidențiind principiile lor geometrice și istorice. Pentru realizarea construcțiilor pas cu pas și pentru verificarea corectitudinii soluțiilor propuse se utilizează aplicația GeoGebra.

Cuvinte cheie: trisecțiune, riglă negradată, compas.

ALTERNATIVE METHODS OF ANGLE TRISECTION

Abstract. Angle trisection is one of the most well-known classical problems of Euclidean geometry, with origins in ancient Greece, related to the challenge of dividing an arbitrary angle into three equal parts using only an unmarked straightedge and compass. Although the impossibility of this construction in general form was rigorously demonstrated in the 19th century, there are alternative methods, based on additional tools and concepts, that allow its realization. This article presents three notable procedures: Archimedes' method, Dürer's method, and Finsler's method, highlighting their geometric and historical principles. The GeoGebra application is used to carry out the step-by-step constructions and to verify the correctness of the proposed solutions.

Keywords: trisection, unmarked straightedge, compass.

Problema trisecțiunii unghiului se enunță astfel: Fiind dat un unghi cu măsura oarecare α , să se împartă cu rigla și compasul în trei părți egale.

Raționamentul poate fi structurat după cum urmează: construim cu rigla și compasul o semidreaptă în interiorul unghiului dat care să formeze cu laturile sale două unghiuri cu măsurile egale cu $\frac{\alpha}{3}$ și $\frac{2\alpha}{3}$, apoi trasăm bisectoarea unghiului cu măsura egală cu $\frac{2\alpha}{3}$.

Pe cercul unitate, considerăm punctele de coordonate $(1,0)$ și $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Intenționăm să determinăm punctul de coordonate $(\cos \frac{\alpha}{3}, \sin \frac{\alpha}{3})$.

În formula $\cos \alpha = 4\cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3\cos \frac{\alpha}{3}$, substituim $\cos \frac{\alpha}{3}$ cu $\frac{x}{2}$ și obținem ecuația de gradul al treilea $x^3 - 3x - 2\cos \alpha = 0$ (1).

Verificăm dacă ecuația (1) are soluție pentru $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Cu aceste date, ecuația devine $x^3 - 3x - 1 = 0$, care are toate rădăcinile iraționale, deci e imposibilă construcția lor cu rigla și compasul. Prin urmare, este imposibil să construim unghiul cu măsura egală cu 20° , treimea unghiului cu măsura egală cu 60° utilizând rigla și compasul.

Așadar, în general, unghiurile nu se pot împărți în trei părți egale cu rigla și compasul. Evident, există cazuri particulare în care trisecțiunea se poate realiza cu cele două instrumente. De exemplu, pentru $\alpha = \pi$, $2\cos \alpha = -2$, obținem $x = 2\cos \frac{\pi}{3} = 1$. Cum $1 \in \mathbb{Q}$, deducem că unghiul π poate fi triseccionat.

Există o mulțime infinită de valori ale lui α pentru care ecuația trisecțiunii admite rădăcină rațională, adică constructibilă cu rigla și compasul și, de asemenea, o mulțime infinită de valori pentru care ecuația trisecțiunii nu admite rădăcină rațională, deci imposibil de construit cu rigla și compasul.

Astfel, în cazul unghiurilor $\frac{\pi \cdot m}{2^n}$, unde m și n sunt numere naturale, trisecțiunea este efectuabilă cu rigla și compasul. Iar unghiurile $\frac{\pi \cdot 2^n}{3 \cdot m}$, unde m și n sunt numere naturale, nu pot fi triseccionate cu rigla și compasul.

În anul 1837, Pierre-Laurent Wantzel a demonstrat cu rigoare matematică imposibilitatea efectuării trisecțiunii arbitrare a unui unghi utilizând exclusiv rigla și compasul. Încă din momentul formulării acestei probleme clasice și până la demonstrarea caracterului ei insolubil prin mijloace elementare, numeroși matematicieni au încercat să găsească soluții. Astfel, au fost propuse diverse metode de aproximare, caracterizate printr-un grad ridicat de precizie, dar care apelau la instrumente auxiliare, precum rigla etalon (Arhimede), conoida (Nicomede), cuadratricea (Hippias din Elis), hiperbola (János Bolyai) sau parabola (René Descartes). În cele ce urmează, vom analiza trei metode de construcție aproximativă a trisecțiunii unghiului, datorate lui Arhimede, pictorului german Albrecht Dürer și matematicianului elvețian Paul Finsler.

Metoda lui Arhimede

În încercarea de a obține o soluție aproximativă cât mai precisă a problemei, Arhimede a recurs la utilizarea riglei etalon, pe care a delimitat două puncte de referință.. Fie acestea X și Y .

Considerăm un unghi cu centrul într-un punct O din plan cu măsura α este pe care dorim să-l împărțim în trei părți egale. Trasăm cercul cu centrul în punctul O și rază egală cu lungimea segmentului XY . Notăm cu A și B punctele în care cercul intersectează laturile unghiului.

Construim punctul C , simetricul punctului B față de O .

Cu rigla etalon trasăm segmentul de dreaptă cu o extremitate în punctul A , care trece printr-un punct N al cercului și are cealaltă extremitate în punctul M care aparține dreptei BC .

$\sphericalangle AOB = \alpha$; $\sphericalangle AMB = \frac{\widehat{AB} - \widehat{NC}}{2} = \frac{\sphericalangle AOB - \sphericalangle NOC}{2}$. Cum $MN = NO$, rezultă că triunghiul NMO este isoscel, deci $\sphericalangle NOC \equiv \sphericalangle NMC$. Prin urmare, $\sphericalangle AMB = \frac{\alpha - \sphericalangle AMB}{2}$, de unde obținem $\sphericalangle AMB = \frac{\alpha}{3}$. În figura de mai jos am aplicat metoda lui Arhimede pentru $\alpha = \sphericalangle AOB = 60^\circ$ și am obținut $\sphericalangle AMB = 19,11^\circ$.

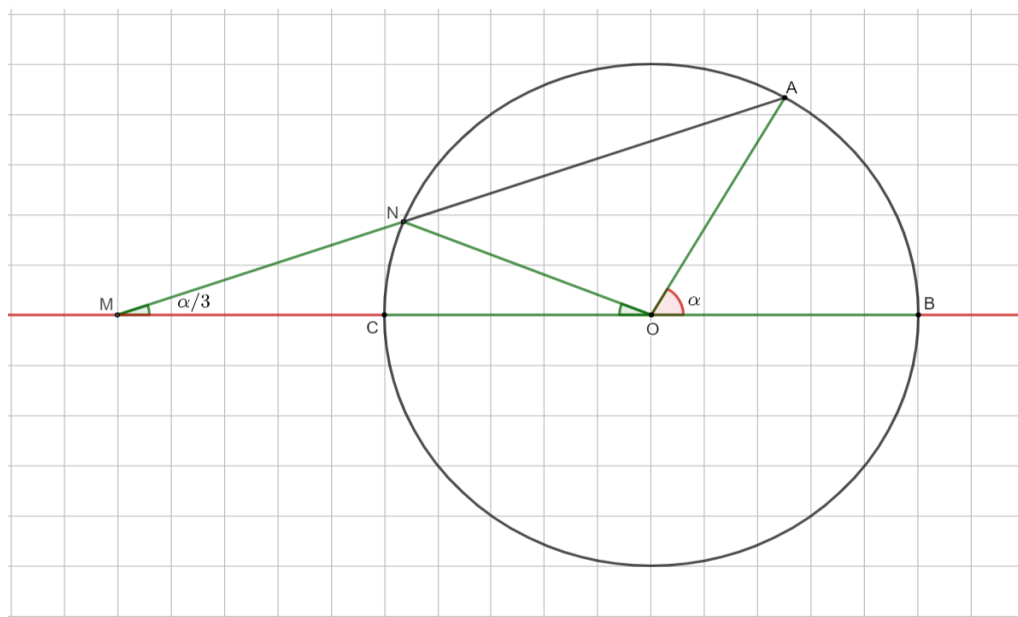


Figura 1. Trisecțiunea unghiului prin metoda lui Arhimede

Metoda lui Dürer

Albrecht Dürer a fost un pictor german care a publicat în anul 1525 lucrarea *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit in Linien, Ebenen und ganzen Körpern*, în care oferă o aproximare foarte bună a problemei referitoare la trisecțiunea unghiului. Vom prezenta în continuare etapele construcției propuse de Albrecht Dürer.

Fie arcul AD corespunzător unghiului la centru $\sphericalangle AOD$ pe care dorim să-l împărțim în trei unghiuri congruente.

- Împărțim coarda AD în trei segmente congruente: $[AM] \equiv [MN] \equiv [ND]$. Din M și N ridicăm perpendicularele pe dreapta AD și notăm cu P , respectiv Q punctele în care aceste intersectează arcul AD .
- Construim cercurile $\mathcal{C}_1(A, AP)$ și $\mathcal{C}_2(D, DQ)$ care vor intersecta coarda AD în punctele S și T . Construim punctele R și U pe segmentele MS și NT astfel încât $RS = \frac{1}{3}MS$ și $TU = \frac{1}{3}NT$. Construim cercurile $\mathcal{C}_3(A, AR)$ și $\mathcal{C}_4(D, DU)$ care intersectează arcul AD în punctele B și C .

Se consideră că punctele B și C împart arcul AD în trei arce AB, BC, CD „aproape” congruente, deci și unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt „aproape” congruente.

În figura de mai jos am aplicat metoda descrisă mai sus pentru unghiul AOD cu măsura de 120° , utilizând softul GeoGebra și am obținut $\sphericalangle AOB = 39,99^\circ$, $\sphericalangle BOC = 40,05^\circ$ și $\sphericalangle COD = 39,96^\circ$, valori foarte apropiate de 40° , treimea măsurii unghiului AOB .

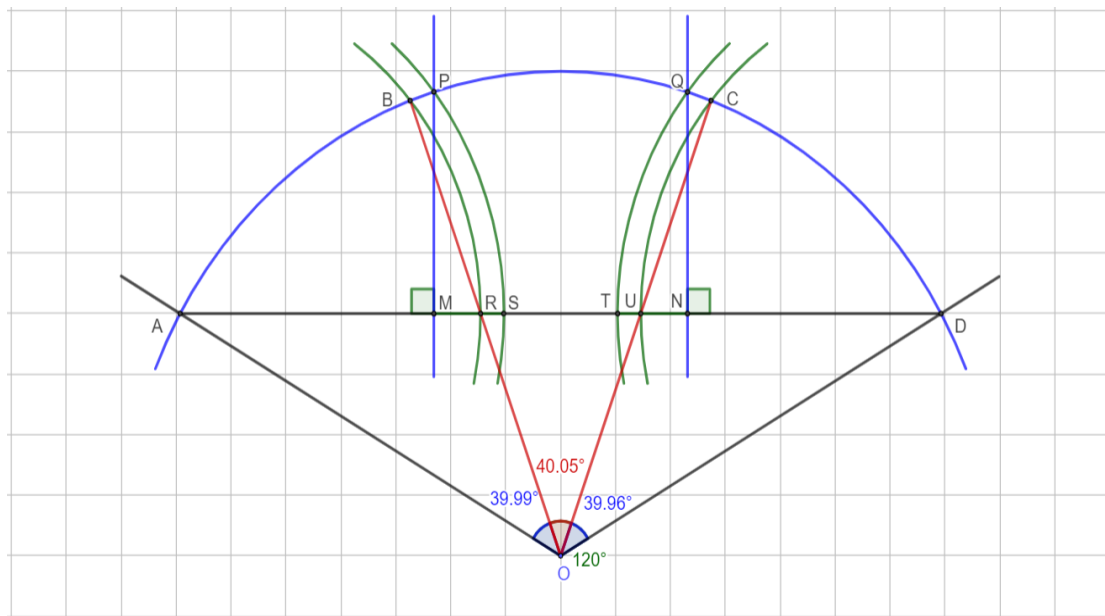


Figura 2. Trisecțiunea unghiului prin metoda lui Dürer

Metoda lui Finsler

O metodă de construcție de o precizie remarcabilă pentru aproximarea trisecțiunii unui unghi a fost propusă de matematicianul german Paul Finsler (1894–1970), cunoscut pentru contribuțiile sale semnificative în geometria diferențială, teoria probabilităților și teoria numerelor.

Vom exemplifica metoda introdusă de Finsler utilizând aplicația Geogebra pentru un unghi AOB cu măsura egală cu 120° . Etapele construcției sunt următoarele:

- trasăm bisectoarea OM a unghiului AOB , apoi bisectoarea ON a unghiului BOM ;
- considerăm un punct arbitrar E pe latura OB a unghiului BON ;
- construim cercul $C(O, \frac{OE}{4})$ și notăm cu C punctul în care intersectează segmentul OE ;
- construim cercul $C(E, \frac{18 \cdot OE}{7})$ și notăm cu D punctul în care intersectează segmentul OE ;
- construim cercul $C(D, DE)$ și notăm cu F punctul în care intersectează semidreapta ON ;
- trasăm semidreapta CF .

Am obținut unghiul ECF cu măsura egală cu $39,98^\circ$, care este o aproximare foarte bună a unghiului de 40° , o treime din măsura unghiului AOB .

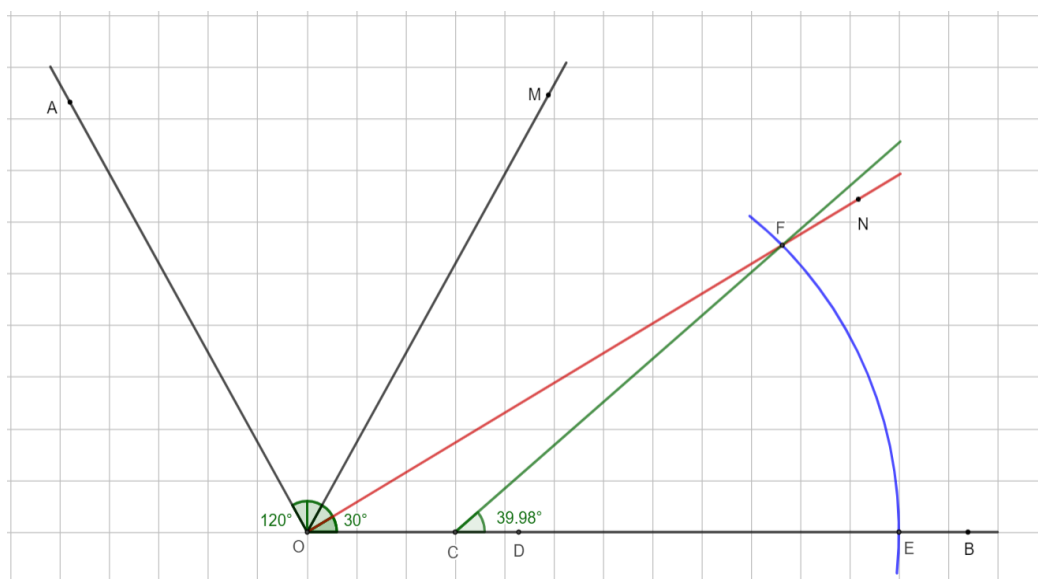


Figura 3. Trisecțiunea unghiului prin metoda lui Finsler

Bibliografie

1. Source: <https://www.cs.ubbcluj.ro/~pablaga/geom2/constructibilitate.pdf>
2. TOTH, A. *Noțiuni de teoria construcțiilor geometrice*. București: Editura didactică și pedagogică, 1963. 146 p.
3. BUICLIU, Gh. *Probleme de construcții geometrice cu rigla și compasul*. București: Editura tehnică, 1957. 648 p.
4. RADIAN, H.R., RADIAN, T.J. *Recreații matematice*. București: Editura Albatros, 1973. 318 p.
5. DĂNCILĂ, I. *Construcții cu rigla și compasul*. București: Editura Sigma, 2003. 160 p.
6. LAMPHIER, L. *Geometric Constructions*. Iowa State University, 2004.
7. PĂDURARU, V. *Construcții geometrice cu rigla și compasul – abordări metodice*. Iași: Editura Stef, 2018.
8. ILEANA, I. *Matematica desenată – Cum să crezi lumea cu rigla și compasul*. Craiova: Editura Sitech, 2025. 168 p. ISBN 978-606-11-8819-2.

UDC: 37.091.3:004.9

VALORIFICAREA EXTENSIEI *EDUCAȚIE INTERACTIVĂ* ÎN PROIECTAREA DIDACTICĂ PRIN IMPLEMENTAREA FIȘELOR INTERACTIVE

Natalia JOSU, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-3687-5437>

e-mail: josu.natalia@upsc.md

Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale
Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. Digitalizarea educației impune adaptarea continuă a strategiilor didactice și valorificarea resurselor tehnologice moderne în procesul de predare-învățare-evaluare. Articolul de față analizează potențialul extensiei „*Educație interactivă*” ca instrument de sprijin în proiectarea și implementarea fișelor interactive, cu aplicabilitate directă în activitatea didactică. Sunt prezentate principalele funcționalități ale platformei, modalitatea de creare a fișelor, precum și avantajele utilizării acestora în contexte educaționale.

Cuvinte cheie: educație interactivă, fișe interactive, proiectare didactică digitală, activități didactice interactive, resurse educaționale digitale.

VALIDATING THE EXTENSION OF INTERACTIVE EDUCATION IN TEACHING DESIGN THROUGH THE IMPLEMENTATION OF INTERACTIVE WORKSHEETS

Abstract. The digitalization of education requires the continuous adaptation of teaching strategies and the effective use of modern technological resources in the teaching-learning process. This article analyzes the potential of the "Interactive Education" extension as a support tool in the design and implementation of interactive worksheets, with direct applicability in teaching activities. The main functionalities of the platform are presented, along with the process of creating worksheets and the advantages of using them in educational contexts.

Keywords: Interactive Education, Interactive Worksheets, Digital Instructional Design, Interactive Teaching Activities, Digital Educational Resources.

Introducere

Transformările profunde generate de digitalizarea educației determină o reconfigurare a modului în care sunt proiectate și desfășurate activitățile didactice. În acest context, cadrele didactice sunt tot mai des provocate să adopte instrumente digitale menite să sprijine o învățare activă, personalizată și centrată pe elev. Un astfel de instrument este extensia digitală *Educație interactivă*, care facilitează crearea și organizarea fișelor interactive, susținând în mod direct demersul de proiectare didactică.

Fișele interactive oferă nu doar suport pentru livrarea conținutului, ci și funcționalități de evaluare formativă și sumativă, într-un format vizual și interactiv. Interfața intuitivă și diversitatea tipurilor de sarcini disponibile susțin o abordare pedagogică modernă, axată pe dezvoltarea competențelor digitale.

Articolul de față își propune să investigheze potențialul extensiei *Educație interactivă* ca resursă digitală integrabilă în proiectarea didactică. Sunt analizate componentele interfeței, etapele de creare a fișelor interactive, precum și beneficiile utilizării acestora în procesul de predare-învățare-evaluare. Lucrarea oferă, totodată, un cadru aplicativ pentru utilizarea extensiei în contextul actual al educației digitalizate.

Prezentarea generală a platformei Educație Online

Platforma educațională *Educație Online* oferă o bibliotecă digitală complexă, care conține lecții video organizate pe discipline și clase, în concordanță cu curriculumul național pentru învățământul primar, gimnazial și liceal. De asemenea, platforma pune la dispoziție manualele școlare, aliniate cerințele curriculare, în format PDF, facilitând accesul elevilor și cadrelor didactice la resurse educaționale.

Elevii au posibilitatea de a accesa lecțiile video de la distanță, direct de pe platforma www.educatieonline.md, fără a fi necesară autentificarea sau crearea unui cont. Această accesibilitate sporită facilitează învățarea autonomă, elimină barierele tehnice și oferă un suport educațional flexibil, adaptat nevoilor individuale ale fiecărui elev.

Platforma *Educație Online* a fost completată cu o nouă extensie și anume *Educație Interactivă* pentru profesori, elevi și părinți. Cu ajutorul extensiei date, fiecare cadru didactic are posibilitatea de a transforma procesul educațional într-o experiență care dezvoltă gândirea critică, într-un mod interactiv și creativ, focalizată pe nevoile individuale ale fiecărui elev. Astfel, fiecare elev poate să-și testeze cunoștințele, să exerseze în propriul ritm și să însușească materialul predat într-un mod interactiv și distractiv. Profesorii care accesează biblioteca digitală au la dispoziție zece tipuri de exerciții interactive, utile pentru evocare, realizarea sensului, reflecție și extensie [1].

Descrierea elementelor funcționale ale interfeței Educație interactivă

Pagina principală a extensiei *Educație interactivă* conține opțiunile: *Manuale digitale*, *Fișe interactive*, *Caută Activitate* și *Logare*.

 **Manuale Digitale**

– conține manuale sau module completate cu activități digitale conform curriculumului național la diverse discipline;

 **Fișe Interactive**

– include la moment fișe interactive la trei discipline școlare: Matematica, Fizica și Limba engleză, care acoperă conținuturile de bază din curriculumul național;

 **CAUTĂ ACTIVITATE**

– funcția de căutare oferă atât elevilor cât și profesorilor posibilitatea de a localiza rapid exercițiile interactive stocate în Biblioteca digitală. Aceștia pot utiliza ca cuvinte cheie: denumirea disciplinei, clasa sau tema specifică pentru a căuta mai ușor conținutul solicitat.

 Login

– oferă posibilitatea utilizatorilor deja înregistrați de a se autentifica în aplicație, asigurând astfel accesul la funcționalitățile personalizate și la conținutul specific fiecărui profil. După autentificarea în aplicație, utilizatorului i se oferă acces la un panou de control personalizat, care include mai multe opțiuni funcționale esențiale pentru utilizarea eficientă a sistemului. Acestea sunt:

 Cabinet personal

- cabinetul personal oferă cadrelor didactice un spațiu dedicat desfășurării activităților de evaluare, atât în scop formativ, cât și sumativ.

 Creează activități

– secțiunea dată oferă cadrelor didactice un set extins de instrumente digitale pentru proiectarea de activități interactive, menite să susțină procesul de predare-învățare-evaluare. Multe dintre aceste activități sunt similare cu cele disponibile pe platforma LearningApps (Quiz cu alegere multiplă, Adevărat/Fals, Potrivește perechi, Text lacunar etc), însă sistemul integrează și activități originale, dezvoltate exclusiv pentru mediul educațional local și adaptate nevoilor specifice ale utilizatorilor (Live Test, Fișe interactive, Carte interactivă, Jeopardy, Roata norocului, Sondaj Live, Edupolly, Manual digital, Test sumativ).

 Activități create

– în secțiune dată se regăsesc toate activitățile create anterior de către utilizator și organizate automat în funcție de tipul acestora. Fiecare activitate este afișată împreună cu trei opțiuni funcționale:

- *Link* – permite accesul direct către activitate pentru exersare sau distribuire către elevi;
- *Editare* – oferă posibilitatea modificării conținutului activității;
- *Ștergere* – permite eliminarea definitivă a activității din contul utilizatorului.

 Rapoarte

– secțiunea dată are rolul de a centraliza și vizualiza datele rezultate în urma desfășurării activităților de evaluare. Această componentă oferă cadrelor didactice acces în timp real la informații relevante privind performanța elevilor, pe parcursul sau la finalul evaluării. La finalul procesului de evaluare, profesorul poate exporta rezultatele în format Excel sau PDF, ceea ce facilitează arhivarea, raportarea și utilizarea ulterioară a datelor pentru analiza performanței sau feedback formativ.

 Tutoriale

– această secțiune include materiale video explicative menite să sprijine utilizatorii în procesul de creare și gestionare a activităților digitale.



Josu Natalia ▾

– meniul utilizatorului include opțiunile:

- *Planificator* – funcționalitatea dată oferă cadrelor didactice posibilitatea de a dezvolta și gestiona proiecte didactice de lungă și scurtă durată;
- *Suport Tehnic* – oferă acces rapid la asistență tehnică, pentru rezolvarea eventualelor probleme sau întrebări legate de utilizarea platformei;
- *Logout* – permite utilizatorului să se deconecteze de la platformă, închiderea sesiunii curente.

Elaborarea proiectului didactic sub formă de fișă interactivă

Pornind de la opțiunile generale prezentate anterior, urmează să fie detaliată funcționalitatea de creare a fișelor interactive, care facilitează realizarea unui proiect didactic coerent și bine structurat, integrând activități educaționale interactive, ce sprijină o predare mai eficientă și personalizată.

Accesarea opțiunii de creare a fișelor interactive se realizează din secțiunea *Creează activități*, unde aceasta este disponibilă alături de celelalte tipuri de activități educaționale oferite de platformă. Selectarea acesteia deschide o interfață intuitivă și prietenoasă, concepută pentru a ghida utilizatorul în procesul de construire a fișei.

În partea stângă a interfeței sunt afișate componentele esențiale de editare, sub forma unor blocuri funcționale ce permit inserarea de conținut variat, precum text, imagini, fișiere video sau elemente audio. Aceste blocuri sunt organizate astfel încât utilizatorul să poată construi fișe interactive personalizate, având acces la o gamă largă de opțiuni pentru integrarea materialelor educaționale. Mai jos sunt enumerate blocurile disponibile, fiecare având rolul să contribuie la diversificarea și interactivitatea activităților didactice.

Banner - această funcționalitate oferă posibilitatea inserării unui banner, care poate conține imagini sau texte informative, contribuind astfel la crearea unui mediu interactiv și atractiv pentru utilizator. Utilizarea bannerelor ajută la evidențierea unor informații importante și îmbogățește experiența vizuală a activității didactice, fiind o opțiune utilă pentru structuri educaționale dinamice. De exemplu, bannerul poate reprezenta o imagine relevantă ce ilustrează sau definește vizual numele modulului, contribuind la identificarea rapidă a tematicii și la crearea unei structuri vizuale coerente pentru utilizatori.

Video – această funcționalitate permite inserarea unui link către un videoclip de pe platforma YouTube, oferind utilizatorilor posibilitatea de a adăuga conținut video educațional. În plus, este disponibilă o secțiune de text în care poate fi introdusă o descriere a conținutului video, contribuind astfel la clarificarea scopului și contextului materialului video integrat.

Imagine, Imagine-Text, Text-Imagine, 1 Bloc, 2 Blocuri, 3 Blocuri și 4 Blocuri – butoanele enumerate anterior permit utilizatorilor să insereze imagini, fiecare cu o secțiune text adițională pentru descrierea acestora. Aceste funcționalități sprijină integrarea unor imagini variate, inclusiv SmartArt, hărți conceptuale, grafice, diagrame de flux, ilustrații

educaționale, infografice și alte reprezentări vizuale relevante pentru conținutul educațional.

Text – funcționalitatea respectivă permite inserarea de texte libere, oferind utilizatorilor posibilitatea de a adăuga informații sau explicații suplimentare în cadrul fișei interactive.

Activitate interactivă – funcționalitatea respectivă permite inserarea directă a materialelor educaționale create în cadrul platformei *Educație interactivă* într-o fișă interactivă. Fereastra butonului solicită utilizatorului să furnizeze o descriere a tipului de activitate, selectate dintr-o listă derulantă și să introducă linkul către activitatea respectivă, facilitând integrarea acesteia în fișa curentă.

În plus, fiecare activitate interactivă dispune de o secțiune text adițională, care permite adăugarea unei descrieri a activității, oferind context suplimentar și clarificând instrucțiunile pentru elevi. În fișă, activitatea este plasată sub imaginea reprezentativă, care ilustrează tipul activității, contribuind astfel la o mai bună identificare vizuală și la o structurare clară a conținutului.

Button – permite inserarea unui link extern, care poate reprezenta o activitate creată cu platforme educaționale precum LearningApps, Quizis, Quizlet etc. Această funcționalitate facilitează integrarea de activități interactive externe în fișele educaționale, sprijinind diversificarea resurselor educaționale și îmbogățirea experienței didactice.

Adăugarea blocurilor se realizează printr-o metodă intuitivă, specifică interfețelor moderne, care permite tragerea elementelor din bara laterală și plasarea acestora în zona de editare.

Modelul de editare al fișei interactive propus inițial de platformă integrează următoarele elemente esențiale, care susțin procesul de elaborare a conținutului educațional digital:

- *Titlul paginii* – permite introducerea unui titlu clar și sugestiv, care reflectă tema sau scopul activității, facilitând recunoașterea rapidă a fișei de către utilizator;
- *Zona de construcție a fișei* – constituie spațiul principal de lucru, unde pot fi inserate și organizate blocuri funcționale (texte, imagini, materiale audio-video etc.) în vederea construirii unei activități interactive;
- *Previzualizarea* – permite verificarea aspectului final al fișei înainte de publicare;
- *Salvarea* – asigură stocarea conținutului și generarea unui link unic pentru distribuirea activității.

Pentru a ilustra aplicabilitatea opțiunii *Fișe interactive* în proiectarea demersului didactic, poate fi consultat un model de proiect didactic disponibil la adresa: <https://educatieinteractiva.md/fisa-interactiva/13011> [2, 3].

Concluzii

Utilizarea opțiunii *Fișe interactive* permite utilizatorilor să dezvolte proiecte didactice digitale personalizate, care integrează o gamă largă de activități educaționale adaptabile, menite să susțină învățarea activă și colaborativă. Această funcționalitate permite crearea unor resurse educaționale interactive și flexibile, care pot fi ajustate în funcție de nevoile și ritmul de învățare al fiecărui elev. Astfel, acest instrument didactic devine esențial într-un context educațional digitalizat, contribuind la promovarea unei învățări eficiente, participative și accesibile. Prin integrarea de activități interactive, această opțiune facilitează o abordare pedagogică centrată pe elev, favorizând atât dezvoltarea competențelor digitale ale acestora, cât și înțelegerea mai profundă a materialului didactic.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024

Bibliografie

1. <https://educatieonline.md/About>. Data accesării: 10 august 2025.
2. Curriculum național la disciplina Informatică, Clasele VII-IX, Chișinău 2019. Data accesării: 10 august 2025. Disponibil la: <https://short-link.me/1brBt>.
3. GREMALACHI, A., GREMALACHI, L. *Informatică: Manual pentru clasa a 8-a*. Știința, 2019. 116 p. ISBN 978-9975-85-155-8.

UDC: 004.4'282:378.147

ANALIZA COMPARATIVĂ A REZULTATELOR STUDIULUI LIMBAJELOR DE PROGRAMARE DE CĂTRE VIITORII INFORMATICIENI

Maria PAVEL, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0003-4803-6398>

e-mail: pavel.maria@upsc.md

Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Dorin PAVEL, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-9600-1360>

e-mail: dorin.pavel@usm.md

Departamentul Informatică, Universitatea de Stat din Moldova

Rezumat. Este cunoscută predilecția tinerilor informaticieni pentru limbaje de programare de nivel înalt moderne, minimaliste, precum Python, care permit scrierea rapidă și facilă a codului. În lucrare, sunt analizate rezultatele studiului acestui limbaj de către studenții specialităților informatice, comparativ cu rezultatele obținute la studiul limbajului clasic de programare C, sunt identificate diferențele dintre mediile acestor rezultate și este identificată semnificația statistică a diferenței de medii.

Cuvinte cheie: învățământ superior, plan de învățământ, program de studii Informatică, limbaj de programare C, limbaj de programare Python, analiza statistică.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE RESULTS OF THE STUDY OF PROGRAMMING LANGUAGES BY FUTURE COMPUTER SCIENTISTS

Abstract. It is known that young computer scientists prefer modern, minimalist high-level programming languages, such as Python, which allow for fast and easy code writing. In the paper, the results of studying this language by computer science students are analyzed, compared to the results obtained when studying the classic C programming language, the differences between the means of these results are identified, and the statistical significance of the difference in means is identified.

Keywords: higher education, curriculum, Computer Science study program, C programming language, Python programming language, statistical analysis.

Introducere

În virtutea autonomiei universitare academice, instituțiile de învățământ superior inițiază programe de studii noi, elaborează sau înnoiesc periodic planurile de învățământ și curriculum-urile pentru cursurile incluse în aceste acte, în scopul perfecționării și alinierii la standardele de calificare și asigurării unei bune încadrări a tinerilor specialiști în câmpul muncii. Din acest punct de vedere, planul de învățământ pentru specialitatea 0613.4 *Informatică*, din cadrul facultății de Fizică, Matematică și Tehnologii Informaționale (FM TI) a UPSC a fost actualizat atât în 2024, cât și în 2025, conform cerințelor noului Plan-cadru pentru studii superioare de licență, master și integrate, aprobat recent de MEC.

Programul de studii *Informatică*, menționat, include discipline universitare ce țin de formarea competențelor de programare, gestionare a bazelor de date și a rețelelor de calculatoare, elaborare de software și produse-program. Astfel, este evident, că studiul limbajelor de programare, prin intermediul cărora se formează și dezvoltă competențe esențiale pentru viitorii informaticieni, este o prioritate a planului de învățământ aferent. Majoritatea universităților din țară care dețin acest program de studii, 0613.4 *Informatică*, oferă cursuri de fundamentele programării care au la bază studiul limbajului C, programare web, programare orientată pe obiecte, tehnici de programare etc.

Începând cu versiunile planurilor de învățământ din 2024, 2025, deja au fost incluse și cursuri de studiu a limbajului de programare Python, acesta fiind în topul clasamentelor din ultimii ani, ce se referă atât la solicitările angajatorilor [1], cât și la tendințele moderne ale programatorilor dar și la popularitate [2]. Limbajul Python este foarte apreciat de către angajatori pentru utilitatea acestuia în dezvoltarea de aplicații web, în special pe partea de back-end, dar a câștigat în popularitate, și datorită aplicabilității în diverse domenii ale inteligenței artificiale. Pe de altă parte, măsurările TIOBE („The Importance Of Being Earnest”, companie IT olandeză, specializată în evaluarea și urmărirea calității software-ului) [3], au permis includerea limbajului Python în topul clasamentului și datorită calității codului software elaborat prin intermediul acestuia. Și nu în ultimul rând, acest limbaj este preferatul tinerilor specialiști datorită facilității de învățare, scriere a codului, dinamicității dar, mai ales, și datorită salariilor mari pe care le oferă angajatorii programatorilor de Python, în unele astfel de clasamente acesta ocupând de asemenea primul loc [4, 5].

În raport cu cele expuse mai sus, planul de învățământ pentru specialitatea 0613.4 *Informatică*, din cadrul facultății FMTI a UPSC, versiunile actualizate din 2024 și 2025, include în semestrul II al anului I disciplina *Inițierea în limbajul de programare Python*, pentru studiul căreia se alocă 120 ore total, 4 ECTS. Competențele dezvoltate în cadrul acestui curs sunt necesare pentru studiul altor discipline obligatorii sau opționale incluse în program, precum Inteligența artificială, Robotică, Data Science, Deep Learning, Introducere în Big DATA, Rețele neuronale / Rețele Petri și aplicații.

Pe altă parte, planul de învățământ pentru specialitatea 0613.4 *Informatică* întotdeauna a inclus cursul fundamental de programare studiat în anul I, care inițial se baza pe limbajul de programare Pascal, iar ulterior a fost înlocuit cu C/C++. Deși Pascal este un limbaj de programare elaborat cu scopul de a studia programarea structurată, fiind apreciat pentru claritatea și securitatea codului și utilizat de-a lungul timpului mai mult în scop educativ, totuși în ultimii ani studenții dau preferință limbajelor C/C++, probabil din cauza implementării minime în domeniul dezvoltării de software, dar și datorită solicitărilor angajatorilor din domeniul IT. În acest context și MEC lasă la discreția cadrelor didactice alegerea limbajului Pascal sau C/C++ pentru disciplina școlară Informatică, din care considerente, începând cu 2022, cursul de Fundamentele programării, din semestrul I, la

programul de studii menționat, din cadrul FMTI, a fost actualizat în baza limbajului de programare C/C++.

Astfel studenții programului de studii *Informatică*, studiază, conform planului de învățământ actualizat din 2024, la anul I atât limbajul de programare C, cât și Python. Acestea reprezintă limbaje de niveluri diferite, paradigme diferite și tipuri diferite de translație a codului. Studiile [6, 7] arată că Python se află pe primul loc printre preferințele studenților, ceea ce confirmă și predilecția studenților programului de studii menționat în raport cu limbajul de programare preferat, fapt atestat observațional. În acest context, s-a propus analiza rezultatelor studenților la cele două discipline de programare, studiate paralel, astfel încât să se identifice dacă preferințele studenților influențează asupra scorurilor obținute la curs.

Metode și materiale

Studiul informativ, desfășurat pe parcursul semestrului I, anul I (2024-2025), la specialitatea *Informatică*, fără a avea pretenția unui experiment pedagogic complex, a inclus analiza statistică a mediilor obținute la evaluările semestriale și finale la disciplinele *Fundamentele Programării (Limbajul C)* (FP) și *Inițierea în limbajul de programare Python* (Python).

Pentru a identifica metoda statistică de comparație a mediilor, inițial a fost testată normalitatea distribuției seriilor de date prin intermediul testului Shapiro-Wilk. Ulterior au fost implementate testele t și Wilcoxon pentru compararea mediilor a două eșantioane perechi, având în vedere că același eșantion de studenți a fost testat în două situații experimentale diferite (FP, Python). Instrumentul software utilizat este Jamovi [8].

Rezultate obținute

Statistica descriptivă a seriilor de date pentru cele două discipline informatice de programare incluse în studiu este reprezentată în tabelele 1 și 2 în care sunt incluse tendințele centrale ale grupului. Totodată a fost testată și normalitatea fiecărei distribuții a variabilelor cercetate: nota pe semestru, nota la examen și nota finală pentru FP și Python.

Tabelul 1. Statistica rezultatelor la disciplina FP

	FP semestru	FP examen	FP final
N	9	9	9
Mean	8.39	7.11	7.88
Median	8.50	8	7.70
Standard deviation	1.39	1.90	1.50
Minimum	6.00	5	5.60
Maximum	10.0	10	9.70
Shapiro-Wilk W	0.948	0.874	0.938
Shapiro-Wilk p	0.665	0.136	0.557

Tabelul 2. Statistica rezultatelor la disciplina Python

	Python semestru	Python examen	Python final
N	9	9	9
Mean	8.33	7.44	7.98
Median	8.00	8	8.00
Standard deviation	1.30	1.81	1.41
Minimum	6.00	5	5.60
Maximum	10.0	10	10.0
Shapiro-Wilk W	0.938	0.927	0.964
Shapiro-Wilk p	0.557	0.452	0.842

După cum se atestă, doar variabila „FP examen” nu urmează o distribuție normală, în rest toate celelalte variabile sunt normal distribuite. Această constatare ne permite să utilizăm testul t pentru eșantioane perechi în scopul comparării mediilor rezultatelor la fiecare moment experimental pentru ambele discipline, deoarece variabilele testate sunt cantitative, iar eșantionul este același. Dar, deoarece eșantionul este destul de mic, a fost realizat și testul Wilcoxon, care este recomandabil în această situație, astfel rezultatele fiind confirmate repetat.

Între mediile pe semestru și cele pentru examen sunt diferențe, iar testele t și Wilcoxon ne demonstrează că diferența este semnificativă, în cazul disciplinei FP (tabelul 3, $t(8)=3.12$, cu $p=0.014<0.05$ și $W=42.0$ cu $p=0.024<0.05$), și cu tendință spre semnificație în cazul Cursului de Python (tabelul 4, $t(8)=2.23$, cu $p=0.056<0.1$ și $W=25.0$ cu $p=0.074<0.1$). Diferențele sunt în favoarea notei semestriale la fiecare disciplină, acest lucru fiind argumentat prin faptul că în timpul orelor de curs și laborator studenții lucrează în echipă, colaborează, au acces la suportul resurselor curriculare și la asistenți virtuali. Această constatare atestă același comportament de studiu al studenților atât în cazul cursului preferat de Python, cât și în cazul limbajului clasic de programare C.

Tabelul 3. Paired Samples T-Test, semestru - examen pentru FP

			Statistic	df	p
FP semestru	FP examen	Student's t	3.12	8.00	0.014
		Wilcoxon W	42.0		0.024

Note. $H_a: \mu \text{ Measure 1 - Measure 2} \neq 0$

Tabelul 4. Paired Samples T-Test, semestru - examen pentru Python

			Statistic	df	p
Python semestru	Python examen	Student's t	2.23	8.00	0.056
		Wilcoxon W	25.0		0.074

Note. $H_a: \mu \text{ Measure 1 - Measure 2} \neq 0$

Dacă e să comparăm mediile notelor la examen pentru FP și pentru Python, dar și mediile notelor finale, în același context, atunci vom obține rezultatele incluse în tabelele 5 și 6.

Tabelul 5. Paired Samples T-Test, FP - Python pentru examen

			Statistic	df	p	Mean difference
FP examen	Python examen	Student's t	-1.15	8.00	0.282	-0.333
		Wilcoxon W	2.00 ^a		0.345	-1.000
Note. H _a μ Measure 1 - Measure 2 $\neq$ 0						
^a 5 pair(s) of values were tied						

Tabelul 6. Paired Samples T-Test, FP - Python pentru nota finală

			Statistic	df	p	Mean difference
FP final	Python final	Student's t	-0.728	8.00	0.488	-0.100
		Wilcoxon W	8.00 ^a		0.352	-0.200
Note. H _a μ Measure 1 - Measure 2 ≠ 0						
^a 2 pair(s) of values were tied						

Atât în cazul cursului FP de studiere a limbajului C (tabelul 5, $t(8)=1.15$, cu $p=0.282>0.05$ și $W=2.0$ cu $p=0.345>0.05$), cât și în cazul cursului de studiere a limbajului Python (tabelul 6, $t(8)=0.728$, cu $p=0.488>0.05$ și $W=8.0$ cu $p=0.352>0.05$) nu se atestă diferențe semnificative, chiar dacă diferența infimă dintre medii de 0.3 (examen) și 0.1 (final) este în favoarea variabilei „Python”. Mai mult ca atât, în cazul rezultatelor la examene, sunt 5 perechi de note care coincid, iar în cazul notelor finale sunt 2 perechi de note ce coincid (figurile 1 și 2).

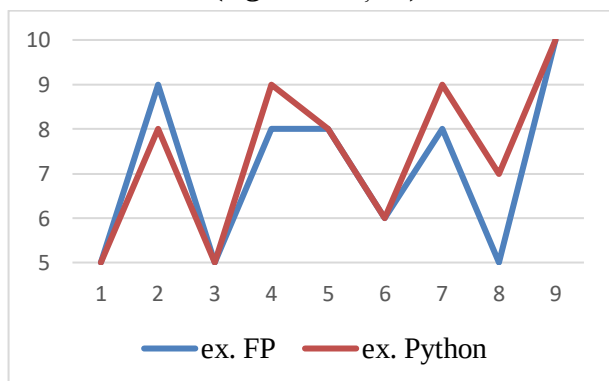


Figura 1. Distribuția notelor la examenul de curs pentru FP și Python

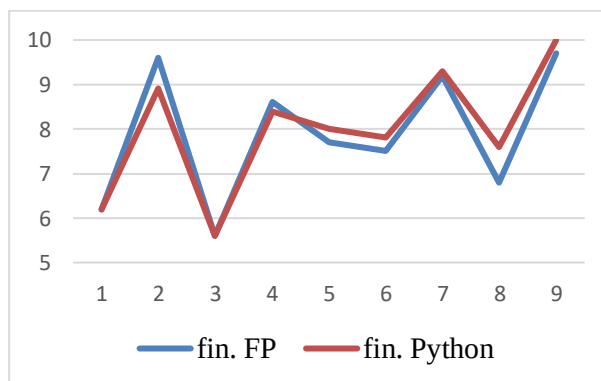


Figura 2. Distribuția notelor finale de curs pentru FP și Python

Menționăm că disciplinele incluse în studiu au fost predate de același cadru didactic, atât la orele de curs, cât și cele de laborator, fapt pentru care nu este exclusă influența unor aprecieri la un curs, asupra celui alt curs, deși fiecare rezultat în parte a fost apreciat cât se poate de obiectiv, conform baremului de notare.

Concluzii

Din cele expuse, se constată că predilecția studenților pentru un limbaj de programare sau altul nu influențează semnificativ rezultatele obținute în studiul acestuia, ci mai degrabă depinde de mulți alți factori semnificativi, precum gândirea algoritmică, competențe de muncă individuală, exercițiul continuu etc.

În pofida studiilor care demonstrează popularitatea și solicitarea pe piața muncii, preferința studenților pentru limbajul de programare Python, totuși rezultatele obținute de studenții specialității *Informatica* din cadrul FMTI a UPSC nu diferă semnificativ.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024.

Bibliografie

1. KOLDOVSKYY, V. Zece limbaje de programare cheie în 2025. Softserve, ianuarie 20, 2025. <https://career.softserveinc.com/ro/stories/top-10-programming-languages-to-learn> [accesat 03.08.2025].
2. Codecool. Topul celor mai populare 12 limbaje de programare pe care să le înveți în 2022. <https://codecool.com/ro/blog/top-limbaje-programare/> [accesat 03.08.2025].
3. JANSEN, P. TIOBE Index for July 2025. July Headline: Senior programming languages battling for a top 10 position. <https://www.tiobe.com/tiobe-index/> [accesat 04.08.2025].
4. Devace Technology. Top 15 Highest Paying Programming Languages. <https://www.devacetechnology.com/insights/highest-paying-programming-languages> [accesat 04.08.2025].
5. GeeksforGeeks. Top Highest Paying Programming Languages in 2025. <https://www.geeksforgeeks.org/blogs/highest-paying-programming-languages/> [accesat 04.08.2025].
6. ISLAM, T., ISLAM, R., JHILIK, R. A., et al. A comparative analysis of programming language preferences among computer science and non-computer science students. În: *European Journal of Theoretical and Applied Sciences*, 2024. Nr. 2(3), pp. 900-912. ISSN 2786-7447. DOI: [https://doi.org/10.59324/ejtas.2024.2\(3\).70](https://doi.org/10.59324/ejtas.2024.2(3).70).
7. ADENE, G.; MBONU, C. E.; ALADE, S. M.; MBA, C. J. Programming Language Preference among Undergraduate Students in Nigeria. În: *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, 2022. Nr. 7(4), pp. 319-325. ISSN 2456-2165. DOI : <https://doi.org/10.5281/zenodo.6499700>.
8. PAVEL, M.; PAVEL, D. Diversifying social statistics software tools with Jamovi. In: *Proceedings of the 30th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2023. September 14-17, 2023: Communications in Education*. Romania: A.I. Cuza Iasi University. pp. 115-123. ISBN 978-606-13-7848-7.

UDC: 531.38:37.02:004

CĂDEREA LIBERĂ A CORPULUI ÎN PREZENȚA FORȚEI DE REZISTENȚĂ

Igor POSTOLACHI, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-1752-5386>

e-mail: postolachi.igor@upsc.md

Ionela GUȚU, masterand

e-mail: ionellagutu3@gmail.com

Valentina POSTOLACHI, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-1977-647X>

e-mail: postolachi.valentina@upsc.md

Catedra Matematică și Fizică, Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă"
din Chișinău, Republica Moldova

Rezumat. Modernizarea abordărilor de predare a fizicii ar trebui să fie asigurată prin introducerea tehnologiilor și dispozitivelor digitale noi în procesul educațional. Articolul examinează utilizarea tehnologiei moderne pentru studierea unității de conținut referitor la căderea liberă a corpului în aer fără neglijarea forței de rezistență.

Cuvinte cheie: forță de rezistență, cădere liberă, senzor digital, realitate virtuală.

FREE FALL OF THE BODY IN THE PRESENCE OF RESISTANCE FORCE

Abstract. Modernization of approaches to teaching physics should be ensured by introducing new digital technologies and devices into the educational process. The article examines the use of modern technology for studying the content unit on the free fall of a body in the air without neglecting the resistance force.

Keywords: resistance force, free fall, digital sensor, virtual reality.

Introducere

Disciplinele naturale, inclusiv Fizica au o contribuție semnificativă la formarea sistemului de cunoștințe referitor la realitatea din jurul nostru, tot odată asigurând că elevii/studentii își pot dezvolta o imagine fizică reală a lumii, o viziune științifică completă asupra fenomenelor din natură, la dezvoltarea abilităților practice - creative și la pregătirea pentru viață în condiții moderne.

Majoritatea fenomenelor din cursul școlar de fizică, treapta liceală, sunt studiate în baza unor modele acceptate, cu ajutorul cărora se deduc legitățile naturale, care guvernează aceste fenomene. În cadrul studiului o parte din factori sunt neglijăți, pentru a ușura modelul matematic și conceperea fenomenului studiat. Însă în unele cazuri factorii neglijăți au o influență majoră asupra fenomenului studiat. Drept exemplu poate servi mișcarea corpului în aer. În modelele propuse sunt neglijate: forma și dimensiunile corpului, forța de rezistență a aerului ș.a. în lucrarea dată ne propunem să analizăm mișcarea unui corp sub un unghi față de orizont în prezența forței de rezistență a aerului.

Căderea liberă a corpului în prezența forțelor de rezistență

În realitate pe Pământ toate mișcările corpurilor au loc în aer sau lichide. În manualele școlare forța de rezistență a mediului se neglijează. Chiar și la specialitățile de profil, tema referitor frecarea vâscoasă se tratează superficial și doar se subliniază că la viteze mici ale corpului forța de rezistență este proporțională vitezei corpului, iar la viteze mari forța de rezistență este proporțională vitezei la pătrat. Tot odată nu se discută, care viteze trebuie considerate mici și care viteze trebuie considerate mari, cum trebuie determinat coeficientul de proporționalitate, pentru a fi luate în considerație. În primul rând în majoritatea cazurilor forța de rezistență a aerului este mult mai mică în comparație cu alte forțe care acționează în sistemul analizat și în majoritatea cazurilor forța de rezistență a aerului se neglijează. În al doilea rând calcule referitor la determinarea mișcărilor în prezența forțelor de vâscozitate sunt mai complexe și pot fi realizate numai pentru anumite tipuri de probleme. Se poate trage concluzia, că problemele legate cu măsurarea forței de rezistență a mediului, care pot fi teme de cercetare nu pot fi rezolvate cu metode analitice simple a matematicii superioare. Tot odată menționăm că multe astfel de probleme pot fi rezolvate experimental.

În lucrarea dată vom analiza căderea verticală a corpurilor și mișcarea corpurilor aruncate sub un unghi față de orizont în prezența forțelor de rezistență

Relațiile matematice și traiectoriile obținute în manualul de fizică pentru clasa a X-a [1] descriu cazuri idealizate de mișcare a corpurilor sub acțiunea gravitațională a Pământului, deoarece se neglijează forța de rezistență a aerului, care depinde la rândul său de viteza de lansare și de forma și dimensiunile corpului care zboară. La o viteză inițială suficient de mare, rezistența aerului poate schimba semnificativ natura mișcării.

În anul 1970 la olimpiadă unională de fizică a fost propusă o problemă simplă la prima vedere: „O minge este aruncată vertical în sus. Care timp este mai mare de ridicare sau de cădere?”

Viteza mingii în lipsa rezistenței aerului este descrisă de relația:

$$v = v_o - gt \quad (1)$$

Mișcându-se sub atracția Pământului mingea peste intervalul de timp t se va opri, adică viteza finală $v = 0$, de unde rezultă:

$$0 = v_o - gt \quad (2)$$

Timpul de ridicare în lipsa rezistenței poate fi determinat din relația:

$$t = \frac{v_o}{g} \quad (3)$$

Mingea se va ridica la înălțimea maximă h , care poate fi determinată din relația:

$$h = v_o t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_o^2}{2g} \quad (4)$$

Putem trage concluzia, că intervalul de timp pentru ridicare și intervalul de timp pentru cădere este egal. Rezultatul obținut este simplu datorită faptului că nu sa luat în considerație forța de rezistență a aerului. Care va fi răspunsul, dacă nu vom neglija forța de rezistență? Scriem legea a II-a a lui Newton pentru mișcarea mingii (Figura 1):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{rez} \quad (5)$$

unde $m, \vec{a}$ – este masa și accelerația mingii respectiv; $\vec{F}_{rez}$ – forța de rezistență a aerului. Proiectăm relația (5) pe axa verticală pentru ambele mișcări ale mingii. În primul caz forța de rezistență este orientată în jos, asemenea accelerației căderii libere:

$$ma_1 = mg + F_1 \quad (6)$$

La căderea mingii forța de rezistență a aerului este orientată în sus (împotriva mișcării):

$$ma_2 = mg - F_2 \quad (7)$$

de unde accelerația mingii va avea valoarea:

$$a_1 = g + \frac{F_1}{m} \quad (8) \quad a_2 = g - \frac{F_2}{m} \quad (9)$$

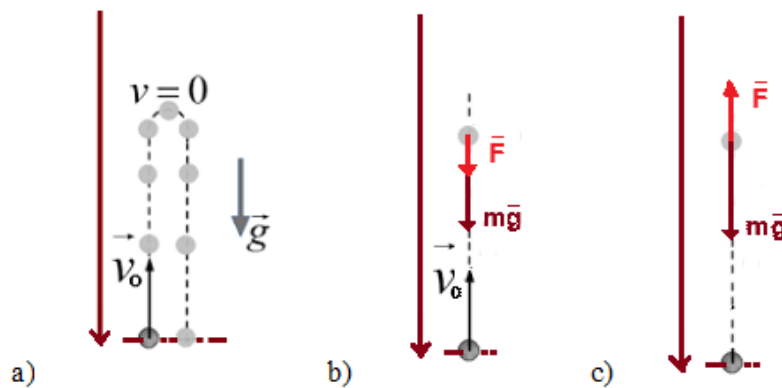


Figura 1. Mișcarea pe verticală a mingii: a) – în lipsa forței de rezistență;
b) - mișcarea în sus a mingii în prezența forței de rezistență;
c) - mișcarea în jos a mingii în prezența forței de rezistență

Rezultă că accelerația mingii după modul la ridicare este mai mare decât accelerația mingii la coborâre: $a_1 > a_2$, adică intervalul de timp la ridicare va fi mai scurt în comparație cu intervalul de timp la coborâre.

Astfel, s-a dovedit că timpul de mișcare ascendentă este mai mic decât timpul de mișcare descendentă, iar rezultatul nu depinde de mărimea forței de rezistență a aerului, principalul motiv fiind că forța de rezistență este orientată în sens opus mișcării.

Pentru verificarea experimentală a rezultatelor teoretice trebuie de folosit un dispozitiv pentru aruncarea unei bile sau mingi. Poate fi folosit și un pistol pentru copii, care împușcă cu bile pentru ping-pong sau bile moi și ușoare. Pentru determinarea vitezei inițiale și finale putem utiliza o poartă digitală de model NeuLog NUL-209 (Figura 2).

Pentru obținerea traiectoriei trebuie utilizată o fotocameră care funcționează în modul de filmare video de mare viteză de model Megaspeed din seria Hand Held Portables.

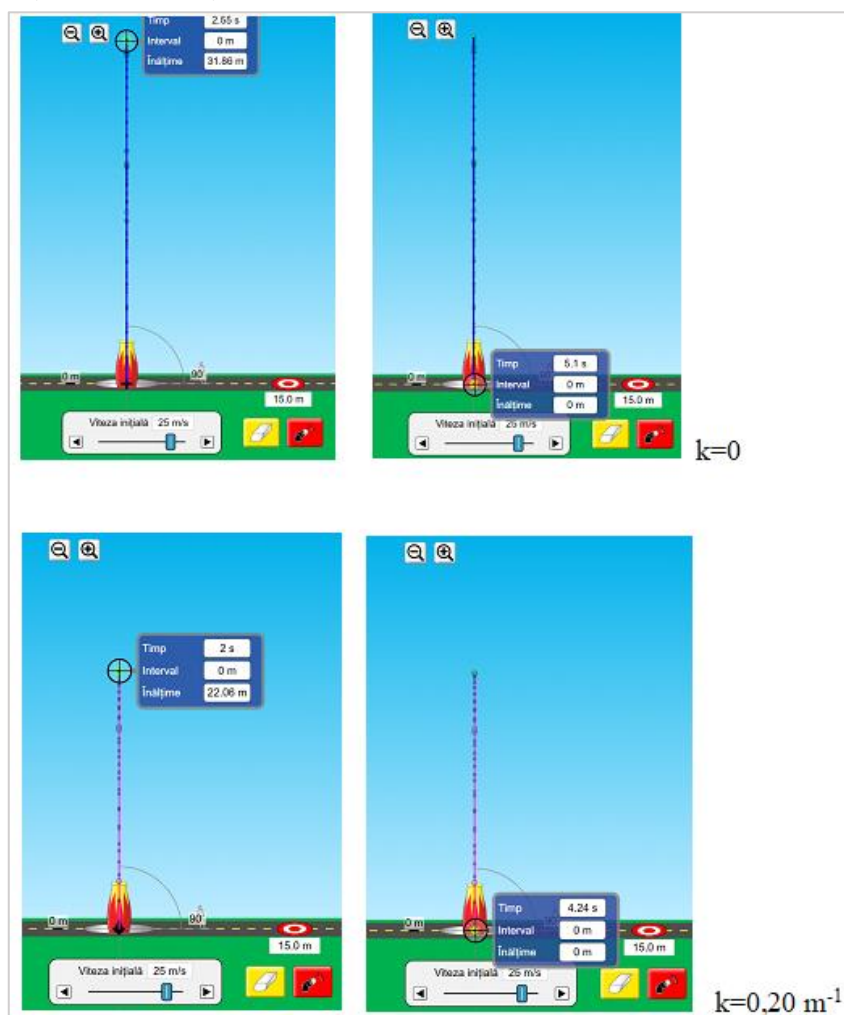
Astfel de camere pot înregistra de până la 512.000 de cadre pe secundă.

Cercetarea poate fi realizată cu ajutorul programului interactiv phet.colorado.edu fizica lansat de University of Colorado Boulder [3].



Figura 2. Poartă optică digitală Photo Gate logger sensor NUL-209 [2]

În figura 3. sunt prezentate traiectoriile unei ghiulele aruncate vertical în sus pentru diferiți coeficienți de rezistență a aerului în intervalul: $k = 0 \div 0,2 \text{ m}^{-1}$.



**Figura 3. Trajectoriile lansării unei ghiulele vertical în sus
cu viteza inițială de 25m/s pentru diferiți coeficienți de rezistență a aerului**

Din figura (3) se observă că intervalele de timp la ridicarea și coborârea ghiulelei în cazul $k=0$ coincid $t_1 = t_2 = 2,55s$. În prezența rezistenței aerului aceste intervale de timp diferă. De exp.: pentru $k=0,2$ intervalele de timp diferă cu $0,24s$ ($t_1 = 2s$; $t_2 = 2,24s$).

Forța de rezistență a aerului [4] la viteze mari este proporțională cu pătratul vitezei:

$$\vec{F}_{rez} = \frac{C_x A \rho v^2}{2} = \frac{k v^2}{2} \quad (10)$$

unde $k = \frac{C_x A \rho}{2}$ - coeficientul de rezistență a aerului; C_x - coeficientul rezistenței frontale; A - aria secțiunii transversale a corpului în direcție perpendiculară mișcării; ρ - densitatea corpului; v - viteza corpului;

Expresia teoretică pentru viteza de mișcare și înălțimea la căderea liberă a unui corp într-un mediu vâscos, atunci când forța de rezistență este proporțională cu pătratul vitezei ($\vec{F}_{rez} = \frac{k v^2}{2}$), are forma [4]:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} th \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t \right); \quad (11) \quad h(t) = \frac{m}{k} \ln ch \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t \right) \quad (12);$$

unde th și ch - sunt tangenta hiperbolică și cosinusul hiperbolic respectiv.

Pentru claritate, vom construi dependențele grafice ale vitezei în funcție de timp pentru corpuri cu valori diferite ale coeficientului k/m : o ghiulea, o minge de lemn, o minge de ping-pong și pentru cazul ideal în care nu există rezistență a aerului (Figura 4). Coeficienții k/m se calculează din următoarele considerații: raza ghiulelei este de 10 cm, ($k/m = 0,2 \cdot 10^{-3} m^{-1}$), aceeași rază este aleasă și pentru bila de lemn $k/m = 2 \cdot 10^{-3} m^{-1}$, și se folosește o minge de ping-pong obișnuită (rază $r = 1,88cm$, masă $m = 1,75g$; $k/m = 0,16 m^{-1}$).

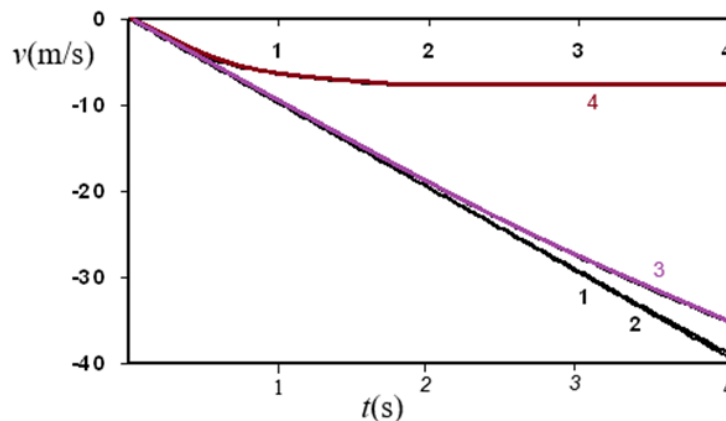


Figura 4. Dependența vitezei diferitor corpuri la căderea liberă în aer [5]

În figura 4 este reprezentată dependența vitezei de timp a diferitor corpuri la căderea liberă în aer [5]. Din figura se vede că dependențele pentru ghiulea și pentru cazul ideal (în lipsa forței de rezistență) se combină într-o singură linie, iar dependența grafică pentru mingea de ping-pong atinge starea de saturație, adică nu variază în timp, ceea ce

corespunde mișcării cu o viteză constantă în regim staționar [5]. Să calculăm valoarea vitezei stabilite:

$$g = \frac{F_{rez}}{m} = kv^2 \quad (13), \text{ de unde viteza: } v = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Pe baza datelor de mai sus, putem calcula că viteza în regim staționar a unei mingi de ping-pong este: $v = \sqrt{\frac{9,80}{0,16}} = 7,82 \frac{m}{s}$.

Când discutăm despre viteza în regim staționar, elevilor li se poate reaminti faptul bine cunoscut că atunci când un parașutist sare dintr-un avion, viteza sa crește mai întâi, apoi, la un timp după deschiderea parașutei, devine constantă și nu se schimbă până la aterizare.

Fenomenul mișcării corpului cu viteză stabilită poate fi demonstrat elevilor din clasa a X-a în cabinetul de fizică în cadrul studierii unităților de conținut referitor mișcarea rectilinie uniformă urmărind căderea liberă a unui pahar de copt din hârtie [6]. Poziția corpului poate fi monitorizată cu ajutorul senzorului digital Neulog NUL-213 (Figura 5). Dependența grafică înregistrată cu senzorul NUL-213 este reprezentată în Figura 6. După lansare paharul se mișcă accelerat și după atingerea vitezei staționare se mișcă uniform. Din grafic putem determina viteza stabilită. Pe sectorul rectiliniu viteza stabilită are valoarea de $v = 1,2 \frac{m}{s}$.

Fiecare corp la căderea liberă în aer atinge propria valoare a vitezei în regim staționar.

Când discutăm despre viteza corpului în regim staționar la căderea liberă, putem reaminti elevilor faptul bine cunoscut, că atunci când un parașutist sare dintr-un avion, la început viteza sa crește, apoi, la un timp după deschiderea parașutei, devine constantă și nu se schimbă până la aterizare.

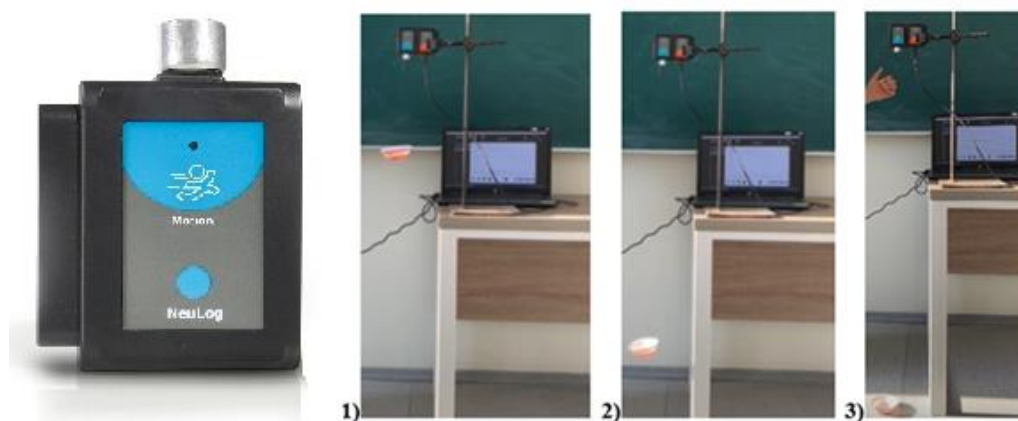


Figura 5. Căderea liberă a unui pahar de copt din hârtie

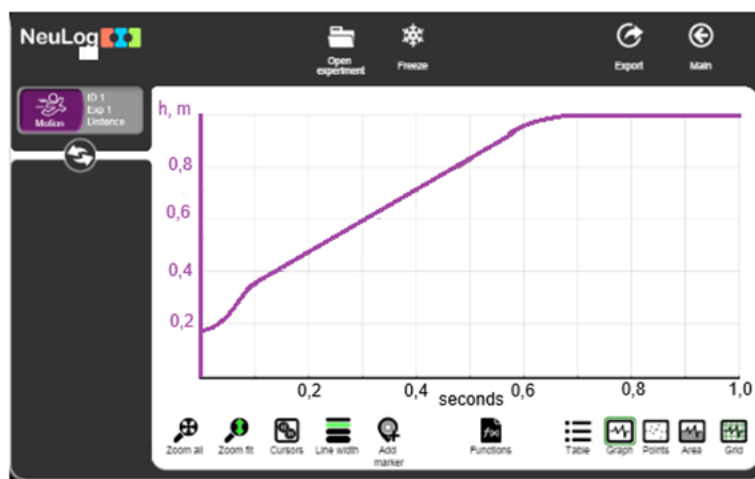


Figura 6. Poziția grafică a paharului de copt la căderea liberă în aer

Concluzii

Această temă oferă o punte ideală între teoria mecanicii clasice și aplicațiile ei în viața cotidiană, în tehnologie și în procesul de învățare. Poate fi extinsă în cadrul orelor de fizică aplicată, în proiecte STEM sau în ateliere interdisciplinare.

Bibliografie

1. MARINCIUC, M., RUSU, S. *Fizică. Manual pentru clasa X-a*. Știința, 2012. 180 p. ISBN 978-9975-67-823-0.
2. <https://neulog.com/photo-gate/> accesat 11.08.2025
3. Interactive Simulations for Science and Math. University of Colorado Boulder, <https://phet.colorado.edu>. accesat 11.08.2025.
4. ALESHKEVICH, V.A., DEDENKO, L.G., KARAVAEV, V.A. *Curs de fizică generală. Mecanica*. 2011. 472 p. ISBN 978-5-9221-1271-0.
5. RYZHIKOV, S.B. *Dezvoltarea abilităților de cercetare ale elevilor supradotați la efectuarea lucrărilor de cercetare în fizică cu experimente bazate pe echipamente foto și video*. M: Școala viitorului, 2012. 160 p. ISBN 978-5-94389-017-8.
6. POSTOLACHI, I., BOCANCEA, V., POSTOLACHI, V. *Metodologia utilizării senzorilor în procesul studierii a disciplinei fizica (Ciclul gimnazial și ciclul liceal)*. Univ. Ped.de Stat „Ion Creangă”. Chișinău: Tipografia UPSC, 2023. 160 p.138. ISBN 978-5-88554-079-8.

UDC: 531.38:37.02:004

MIȘCAREA CORPULUI ARUNCAT SUB UN UNGHI FAȚĂ DE ORIZONT ÎN PREZENȚA FORTELOR DE REZISTENȚĂ

Igor POSTOLACHI, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-1752-5386>

e-mail: postolachi.igor@upsc.md

Vitalie REONEAC, masterand

e-mail: reoneac.vitalie@gmail.com

Valentina POSTOLACHI, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-1977-647X>

e-mail: postolachi.valentina@upsc.md

Catedra Matematică și Fizică, Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă"
din Chișinău, republica Moldova

Rezumat. Dezvoltarea tehnologiei este atât de rapidă încât procesul educațional nu poate ține pasul cu această creștere și nu poate face modificări rapide a manualelor școlare, inclusiv a manualelor de fizică. În acest sens, nevoia de a trece la o nouă paradigmă în educație a devenit deja general recunoscută - de la memorarea unui anumit volum de informații la capacitatea de a dobândi ulterior cunoștințele și abilități practice pentru viață. Modernizarea referitor la predarea fizicii ar trebui să fie asigurată prin introducerea tehnologiilor și dispozitivelor digitale noi în procesul educațional. Articolul examinează utilizarea tehnologiei realității virtuale pentru studierea unității de conținut referitor la mișcarea corpului în aer fără neglijarea forței de rezistență.

Cuvinte cheie: mișcarea oblică, forță de rezistență, viteză stabilită, soft educațional, realitate virtuală, senzor digital.

MOTION OF A BODY THROWN AT AN ANGLE TO THE HORIZON IN THE PRESENCE OF RESISTANCE FORCES

Abstract. The development of technology is so rapid that the educational process cannot keep up with this growth and cannot make rapid changes to school textbooks, including physics textbooks. In this regard, the need to move to a new paradigm in education has already become generally recognized - from memorizing a certain amount of information to the ability to subsequently acquire practical knowledge and skills for life. Modernization of physics teaching should be ensured by introducing new digital technologies and devices into the educational process. The article examines the use of virtual reality technology for studying the content unit on the movement of the body in the air without neglecting the resistance force.

Keywords: oblique motion, resistance force, set speed, educational software, virtual reality, digital sensor.

Introducere

Majoritatea fenomenelor și proceselor descrise în cursul școlar de fizică, treapta liceală, sunt studiate în baza unor modele acceptate, cu ajutorul cărora se deduc legitățile naturale, care descriu aceste fenomene. În cadrul studiului unităților de conținut o parte din parametri sunt neglijăți, pentru a ușura modelul matematic și conceperea fenomenului

studiat. Însă în unele cazuri parametrii neglijăți au o influență majoră asupra fenomenului studiat. Drept exemplu poate servi mișcarea corpului lansat sub un unghi față de orizont în aer. În modelele propuse sunt neglijate: forma și dimensiunile corpului, forța de rezistență a aerului ș.a. În lucrarea dată ne propunem să analizăm mișcarea unui corp sub un unghi față de orizont în prezența forței de rezistență a aerului.

Mișcarea corpului aruncat sub un unghi față de orizont în prezența forțelor de rezistență

Toate mișcările corpurilor de pe suprafața Pământului au loc în aer sau lichide. În cadrul mișcării în diferite medii asupra corpului acționează forța de rezistență a mediului. În majoritatea manualele școlare forța de rezistență a mediului se neglijează.

În lucrarea dată vom analiza mișcarea corpurilor lansate sub un unghi față de orizont în prezența forței de rezistență a aerului.

Relațiile matematice și traiectoriile obținute în manualul de fizică pentru clasa a X-a [1] descriu cazuri idealizate de mișcare a corpurilor sub acțiunea gravitațională a Pământului, deoarece se neglijează forța de rezistență a aerului, care depinde la rândul său de viteza de lansare și de forma și dimensiunile corpului care zboară. La o viteză inițială suficient de mare, rezistența aerului poate schimba semnificativ natura mișcării.

Atât teoria cât și rezultatele experimentale demonstrează că la viteze mici, forța de rezistență a aerului are o dependență liniară față de viteză. La viteze mari, forța de rezistență are o dependență pătratică față de viteză. Înainte de a obține ecuațiile mișcării în prezența forței de rezistență, să evaluăm care dintre componentele forței de rezistență - liniară sau pătratică - are o contribuție mai mare la forța de rezistență a aerului și dacă una dintre aceste componente în anumite condiții poate fi neglijată.

Accelerația mișcării corpului aruncat oblic poate fi determinată din următoarea relație:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_{rez}}{m} \quad (1),$$

unde forța de rezistență

$$F_{rez} = F_1 + F_2 = k_1 v + k_2 v^2 \quad (2)$$

Proiectând ecuația pentru accelerația mișcării corpului pe axele OX și OY vom obține:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_{rez}^x}{m}; \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{-mg + F_{rez}^y}{m} \quad (3)$$

Deoarece în fiecare punct al traiectoriei forța de rezistență este orientată tangențial în sens opus mișcării atunci pentru F_{rez}^x și F_{rez}^y vom obține relațiile:

$$F_{rez}^x = -F_{rez} \cos \alpha = -F_{rez} \cdot \frac{v_x}{v} = -(k_1 \cdot v + k_2 \cdot v^2) \frac{v_x}{v} \quad (4)$$

$$F_{rez}^y = -F_{rez} \sin \alpha = -F_{rez} \cdot \frac{v_y}{v} = -(k_1 \cdot v + k_2 \cdot v^2) \frac{v_y}{v} \quad (5)$$

unde α – este unghiul dintre viteză și axa OX . Dacă în relațiile pentru F_{rez}^x și F_{rez}^y înlocuim valoarea vitezei rezultante $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, vom obține ecuația mișcării în variabile v_x și v_y .

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_1+k_2\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{m}v_x \quad (6)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k_1+k_2\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{m}v_y \quad (7)$$

Deoarece, pentru noi prezintă interes traiectoria mișcării, vom completa sistemul de ecuații de mai sus cu încă două ecuații:

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad (8)$$

și, rezolvându-le împreună cu (6) și (7) vom obține patru funcții dependente de timp:

$$v_x(t), v_y(t), x(t), y(t) \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = -a \sin \alpha \cdot v_x - b \sin \alpha \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x; \end{array} \right. \quad (9.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_y}{dt} = -\sin \alpha \cdot v_y - a \sin \alpha \cdot v_y - b \sin \alpha \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y; \end{array} \right. \quad (9.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{2 \cos \alpha}; \end{array} \right. \quad (9.3)$$

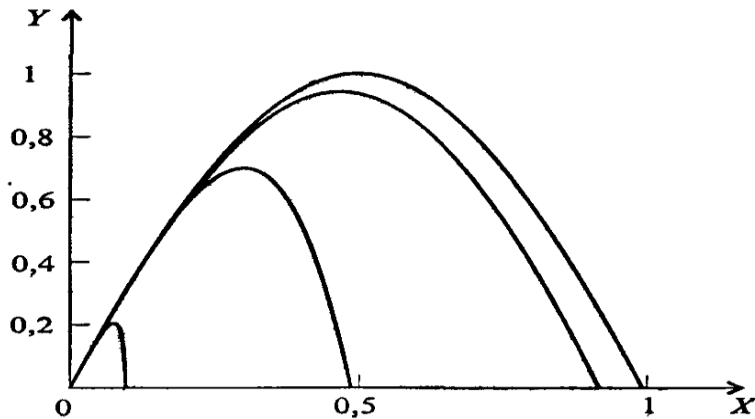
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{2 v_y}{\sin \alpha}; \end{array} \right. \quad (9.4)$$

unde coeficienții a și b sunt determinați de relațiile:

$$a = \frac{k_1 v_0}{mg}, \quad (10) \quad b = \frac{k_2 v_0^2}{mg} \quad (11)$$

Pentru viteze mici traiectoria mișcării pentru $b=0$ este determinată de relația:

$$y(x) = 4 \left(1 + \frac{1}{a \sin \alpha} \right) x + \frac{2}{a^2 \sin^2 \alpha} \ln (1 - 2a \sin \alpha) x \quad (12)$$



**Figură 1. Familia de traiectorii la mișcarea corpului
pentru $b=0$; $a= 0,01; 0,1; 1; 10$; unghiul de lansare $\alpha =45^\circ$**

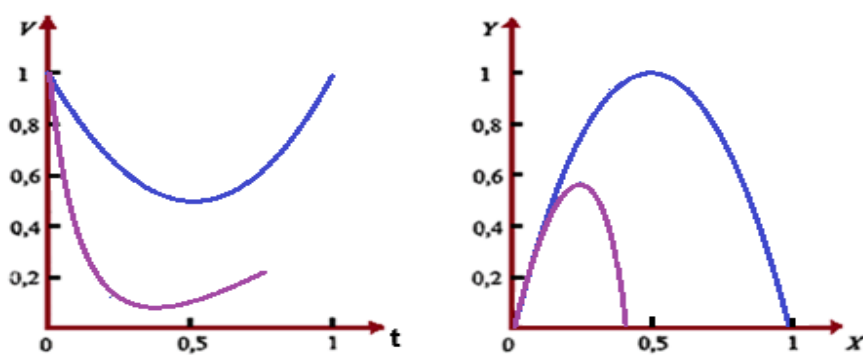
În Figura 1. sunt prezentate traiectoriile a patru mișcări cu valori diferite ale parametrului $a = (0,01; 0,1; 1$ și $10)$, care caracterizează frecarea. Este clar cât de puternic influențează mișcarea forțele de rezistență: - forma traiectoriei, înălțimea maximă și bătaia.

De exemplu. Să estimăm zborul unei ghiulele din fier cu raza $r=0,07$ m, lansată cu o viteză inițială $v_0= 60$ m/s sub un unghi $\alpha= 45^\circ$ față de orizont.

Inițial vom calcula valorile parametrilor **a** și **b**, luând în considerare că densitatea fierului $\rho_{Fe} = 7800 \text{ kg/m}^3$. Din calcule obținem: **a=0,013** și **b=0,049**.

Dacă mediul este vâscos atunci dependențele vitezei de timp **v(t)** și a traiectoriei **Y=f(X)** în prezența forțelor de rezistență se deosebesc esențial (vezi Figura 2.). La neglijarea rezistenței aerului, din desen se vede că viteza corpului se micșorează, atinge valoarea minimă în punctul pentru care componenta $v_y = 0$, apoi crește până la valoarea inițială în momentul când ajunge la Pământ. Forma dependenței reprezintă o parabolă. Se modifică esențial și traiectoria mișcării: se micșorează înălțimea maximă și valoarea drumului parcurs pe orizontală (bătaia).

În prezența forței de rezistenței viteza de asemenea se micșorează atinge o valoare minimă, însă viteza finală după modul este mai mică decât viteza inițială, adică nu atinge valoarea 1.



Figură 2. Graficele dependențelor vitezei de timp $V(t)$ și a traiectoriei $Y(X)$ la neglijarea forțelor de rezistență (albastru) și în prezența forței de rezistență (roz)

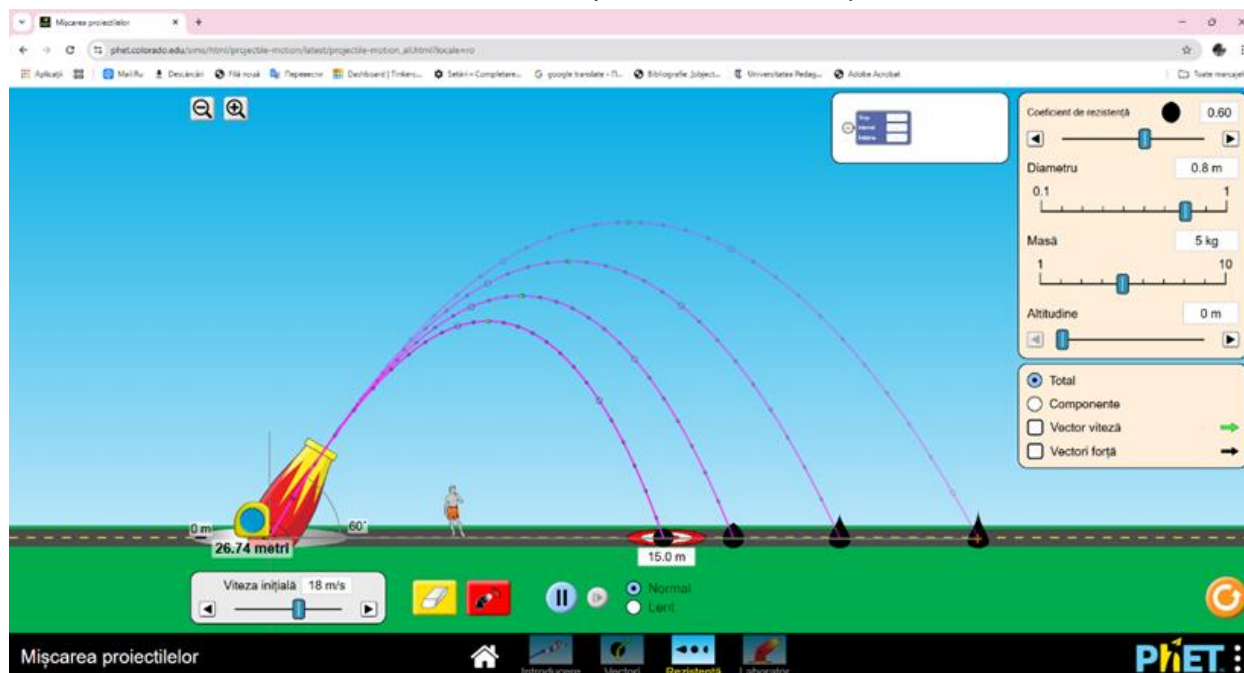
Pentru verificarea experimentală a rezultatelor teoretice trebuie de folosit un dispozitiv pentru aruncarea unei bile sau mingi.. Poate fi folosit și un pistol pentru copii, care împușcă cu bile pentru ping-pong sau bile moi și ușoare. Pentru determinarea vitezei inițiale și finale putem utiliza o poartă digitală de model NeuLog Photo Gate logger sensor NUL-209 [2].

Pentru obținerea traiectoriei trebuie utilată o fotocameră care funcționează în modul de filmare video de mare viteză de model Megasppeed din seria Hand Held Portables. Astfel de camere pot înregistra de până la 512.000 de cadre pe secundă. Ele sunt din seria de camere portabile cu un design robust și oferă imagini calitative cu o rezoluție de până la 1920×1080 . Aceste camere sunt echipate cu SDRAM pentru scriere rapidă și disc SSD de până la 2TB, deci nu necesită conexiune la un computer.

Cercetarea poate fi realizată cu ajutorul programului interactiv phet.colorado.edu fizica lansat de University of Colorado Boulder [3].

După lansarea aplicației selectăm din fereastra din dreapta valoarea coeficientului de rezistență. Pentru fiecare valoare a lui k lansăm corpul selectat. Analizând traiectoriile din figura 3 putem trage concluzia:

- La mărirea coeficientului de rezistență a aerului se modifică traiectoria mișcării corpului;
- La mărirea coeficientului de rezistență a aerului se micșorează înălțimea maximă;
- La mărirea coeficientului de rezistență a aerului se micșorează bătaia.



Figură 3. Traiectoria ghiulelei lansată cu viteza inițială 18 m/s pentru diferite valori ale coeficientului de rezistență $k_1=0,04$; $k_2=0,20$; $k_3=0,40$; $k_4=0,60$

Concluzii

Lucrarea de față a evidențiat interdependența dintre forma traiectoriei, viteza corpului pe de o parte și coeficientul de rezistență a aerului pe de altă parte. Analiza teoretică și aplicațiile practice au arătat că înțelegerea forțelor și a descompunerii vectoriale este esențială pentru a explica forma traiectoriei și valoarea vitezei corpului lansat oblic față de orizont. Mișcarea oblică în prezența forței de rezistență poate fi studiată cu ajutorul platformei educaționale - PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder.

Perspective educaționale. Această cercetare oferă o punte ideală între teoria mecanicii clasice și aplicațiile ei în viața cotidiană, în tehnologie și în procesul de învățare. Poate fi extinsă în cadrul orelor de fizică aplicată, în proiecte STEM sau în ateliere interdisciplinare.

Bibliografie

1. MARINCIUC, M., RUSU, S. *Fizică. Manual pentru clasa X-a*. Știința, 2012. 180 p. ISBN 978-9975-67-823-0.
2. <https://neulog.com/photo-gate/>
3. PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, <https://phet.colorado.edu>

UDC: 37.02:51

**ASPECTE METODOLOGICE PRIVIND FORMAREA COMPETENȚEI
DE MODELARE MATEMATICĂ DIN PERSPECTIVA ASIGURĂRII
CONTINUITĂȚII ÎNTRE ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
ȘI UNIVERSITAR**

Larisa SALI, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0003-1172-3055>

e-mail: sali.larisa@upsc.md

Mirela IONEL, masterand

<https://orcid.org/0009-0008-6627-1942>

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Republica Moldova

Rezumat. În articol sunt analizate unele abordări ale conceptului de modelare matematică și a competențe de modelare matematică. Sunt expuse opiniile autorilor cu referire la fundamentarea teoretică a concepției didactice privind formarea competenței de modelare matematică din perspectiva asigurării continuității între învățământul preuniversitar și universitar. În particular, sunt trasate obiective metodologice și practice, atingerea cărora va contribui la perfecționarea procesului educațional vis-a-vis de formarea competenței de modelare matematică.

Cuvinte cheie: modelare matematică, competență matematică, continuitate.

**METHODOLOGICAL ASPECTS REGARDING THE DEVELOPMENT OF
MATHEMATICAL MODELING COMPETENCE FROM THE PERSPECTIVE
OF ENSURING CONTINUITY BETWEEN PRE-UNIVERSITY AND
UNIVERSITY EDUCATION**

Summary. The article analyzes some approaches to the concept of mathematical modeling and mathematical modeling competencies. It presents the authors' opinions regarding the theoretical foundation of the didactic conception concerning the training of mathematical modeling competence from the perspective of ensuring continuity between pre-university and university education. Specifically, methodological and practical objectives are outlined, the achievement of which will contribute to the improvement of the educational process regarding the development of mathematical modeling competence.

Keywords: mathematical modeling, mathematical competence, continuity.

Introducere

În contextul educației matematice contemporane, dezvoltarea competenței de modelare matematică reprezintă o prioritate strategică, având în vedere complexitatea problemelor reale și nevoia tot mai acută de a pregăti elevi capabili să le abordeze în mod eficient. Modelarea matematică nu este doar un exercițiu de aplicare a unor formule sau algoritmi, ci un proces cognitiv complex, prin care situații din lumea reală sunt transformate în structuri matematice, analizate, interpretate și ulterior utilizate pentru luarea deciziilor sau formularea de predicții.

Importanța acestei competențe depășește cadrul strict al disciplinelor matematice, extinzându-se spre domenii precum științele naturii, inginerie, economie, științele sociale și educație, unde modelarea servește drept instrument esențial pentru rezolvarea problemelor. Studiile internaționale (PISA, TIMSS) subliniază faptul că performanțele elevilor și studenților în modelare sunt direct corelate cu capacitatea lor de a aplica gândirea matematică în contexte variate și interdisciplinare. În acest sens, rezultatele acestor evaluări constituie un indicator al gradului de pregătire pentru participarea activă la viața economică și socială bazată pe cunoaștere.

Prevederi conceptuale

În literatură sunt descrise diverse tipuri de modele matematice: liniare și non-liniare; statice și dinamice; explicite și implicite; discrete și continue; deterministe și probabiliste (stocastice); deductive, inductive sau variabile (flotant); strategice și non-strategice.

Modelarea matematică este privită ca un proces complex și ciclic care implică o serie de faze [5; 7, pag. 282; 10]. Procesul de modelare matematică este frecvent reprezentat sub formă de ciclu iterativ, care ilustrează trecerea continuă între lumea reală și domeniul matematic. Blum & Leiss, prezintă etapele esențiale ale acestui proces:

1. Înțelegerea sarcinii– analiza situației reale și identificarea elementelor relevante.
2. Simplificarea și structurarea– formularea ipotezelor, eliminarea detaliilor neesențiale și organizarea informațiilor.
3. Matematizarea – transformarea situației reale într-un model matematic prin introducerea de variabile, relații și constrângeri.
4. Lucrul matematic – rezolvarea modelului utilizând metode matematice adecvate.
5. Interpretarea rezultatelor – traducerea soluțiilor matematice în termeni relevanți pentru contextul real.
6. Validarea – verificarea dacă rezultatele obținute corespund realității și dacă ipotezele inițiale rămân valabile.
7. Prezentarea – comunicarea concluziilor într-o formă clară și adaptată publicului-țintă [3, pag.222].

Astfel, se evidențiază faptul că modelarea matematică nu este un proces liniar, ci unul circular și iterativ: rezultatele obținute pot conduce la ajustarea ipotezelor, modificarea modelului sau chiar reformularea completă a problemei. Legătura dintre „Restul lumii” (contextul real) și „Matematică” (modelul formal) este menținută prin treceri repetate între modelul situației, modelul matematic și validarea rezultatelor.

Cercetătorii recunosc că dezvoltarea unei expertize în rezolvarea problemelor matematice necesită reconceptualizarea problemelor matematice ca exerciții de modelare matematică; adică, considerarea enunțului unei probleme ca descriere a unei situații din viața de zi cu zi care poate fi modelată matematic [7, pag.282]. Conform lui Asempapa și

Sturgill, aceasta nu se reduce la aplicarea mecanică a unor formule, ci implică un demers cognitiv complex, ce presupune identificarea variabilelor relevante, stabilirea relațiilor dintre acestea, formularea ipotezelor și validarea rezultatelor în raport cu contextul inițial. În esență, modelarea matematică este un „pod” între realitate și matematică, între observație și abstractizare [1, pag.73].

Aspecte didactice privind competența de modelare matematică

În articolul [10] sunt examinate unele aspecte ce țin de modelarea matematică din perspectiva educațională. În particular, sunt precizate etapele unui proces de soluționare a unei probleme reale prin metoda modelării matematice. Sunt expuse concluziile autorilor vis-a-vis de familiarizarea elevilor și profesorilor cu metoda modelării matematice.

În particular, este menționat că din punctul de vedere al instruirii se cere a preciza răspunsul la întrebările:

- Care sunt conținuturile relevante pentru a forma competențele specifice corelate cu modelarea matematică?
- Cum trebuie să fie construit discursul cadrului didactic în acest context?
- Care este volumul de timp necesar pentru realizarea sarcinilor ce vizează dezvoltarea competențelor specifice corelate cu modelarea matematică?
- Cum vom evalua dacă elevul deține competența?

Profesorii practicieni înțeleg modelarea drept o activitate prin care „elevii aplică matematica pe care o cunosc pentru a înțelege mai bine și pentru a lua decizii informate despre situații din viața reală”. Această abordare subliniază rolul practic al modelării, precum și faptul că ea presupune un ciclu iterativ: formularea problemei, matematizarea, rezolvarea, interpretarea și, dacă este cazul, revizuirea modelului [8, pag.27].

Modelarea nu este un scop în sine, ci un instrument de înțelegere și intervenție asupra realității. Ea solicită atât cunoștințe teoretice, cât și abilități practice, precum și atitudini pozitive față de rezolvarea problemelor complexe. Învățarea modelării matematice trebuie să fie integrată în contexte semnificative, care să stimuleze gândirea critică și creativitatea elevilor și studenților.

Competența matematică poate fi tratată ca o disponibilitate bine informată de a acționa corespunzător în situații care implică un anumit tip de provocare matematică [6, pag.49]. Faptul că anumite competențe sunt independente și relativ distincte nu implică faptul că diferitele competențe nu au legătură între ele sau că sunt atât de clar definite încât nu există suprapuneri. O competență nu poate fi în mod normal dobândită sau stăpânită separat de celelalte competențe.

O definiție a competenței de modelare matematică este expusă în [2]: „A deține competența de modelare matematică înseamnă a fi capabil să realizezi în mod autonom și

cu o înțelegere aprofundată toate aspectele unui proces de modelare matematică într-un anumit context.”

Competența de modelare matematică implică, pe de o parte, capacitatea de a analiza fundamentele și proprietățile modelelor existente și capacitatea de a evalua gama și validitatea acestora. Pe de altă parte, competența implică capacitatea de a efectua modelare activă în contexte date, adică matematizarea și aplicarea acesteia în situații dincolo de matematica în sine. Aceasta include și capacitatea de a „dematematiza” trăsăturile modelelor matematice existente, de a decodifica și interpreta elementele și rezultatele modelului în funcție de zona sau situația reală pe care ar trebui să o modeleze [9, pag.58].

Modelarea activă conține o gamă largă de elemente diferite. În primul rând, există capacitatea de a structura zona sau situația reală care urmează să fie modelată. Apoi, vine capacitatea de a implementa o matematizare a acestei situații, adică traducerea obiectelor, relațiilor, formulării problemei etc. în termeni matematici, rezultând un model matematic. Ulterior, elevul trebuie să fie capabil să lucreze cu modelul rezultat, inclusiv să rezolve problemele matematice care pot apărea, precum și să valideze modelul finalizat prin evaluarea acestuia atât internă (în raport cu proprietățile matematice ale modelului), cât și externă (în raport cu zona sau situația modelată). În plus, există capacitatea de a analiza critic modelul atât în raport cu propria sa utilizabilitate și relevanță, cât și în raport cu posibile modele alternative, precum și de a comunica cu ceilalți despre model și rezultatele sale. În cele din urmă, în modelarea activă este inclusă și capacitatea de a monitoriza și controla întregul proces de modelare.

Analiza diverselor abordări ale conceptului de competență, în general, și a competenței de modelare matematică, în particular, considerăm necesar de a preciza definiția competenței de modelare matematică în conformitate cu teoriile educaționale actuale. Aceasta va aduce un aport semnificativ la fundamentarea teoretică a concepției didactice privind formarea competenței de modelare matematică din perspectiva asigurării continuității între învățământul preuniversitar și universitar în condițiile implementării TIC, a integrării IA în procesul educațional și elaborarea metodologiei de implementare a acesteia.

Formarea și dezvoltarea competenței de modelare matematică

Aspecte didactice privind competența de modelare matematică ocupă un loc esențial în procesul de formare a gândirii științifice și a capacității de aplicare a conceptelor teoretice în situații practice. Modelarea matematică, privită ca o punte între realitate și formalismul matematic, își găsește aplicabilitate în multiple domenii, motiv pentru care este prezentă atât în curriculumul universitar pe domenii precum științele educației, ingineria și economia, cât și în curriculumul școlar destinat învățământului preuniversitar. În domeniul științelor educației, accentul se pune pe dezvoltarea gândirii logice și a

capacității de interpretare a fenomenelor din viața reală prin instrumente matematice, în timp ce în inginerie modelarea matematică devine o competență tehnică indispensabilă în proiectarea, analiza și optimizarea proceselor și sistemelor. În economie, aceasta permite interpretarea datelor, previzionarea tendințelor și fundamentarea deciziilor pe baza unor modele matematice riguroase.

La nivelul **curriculumului școlar**, modelarea matematică este introdusă gradual, pornind de la exemple simple, legate de situații cotidiene, până la modele mai complexe, care implică analiza datelor, aplicarea funcțiilor, rezolvarea de ecuații și interpretarea grafică a rezultatelor. Această progresie permite elevilor să dezvolte treptat nu doar competențe matematice, ci și gândirea critică și capacitatea de a face conexiuni între discipline. Particularități ale procesului de modelare matematică corelate cu procesul educațional corespunzător și exemple concrete pot fi examinate în publicațiile [1 – 6, 8].

Anumite particularități privind abordările curriculare vis-a-vis de conceptul de modelare în curriculumul la matematică aprobat în Republica Moldova sunt prezentate în articolul [10].

Dezvoltarea competenței de modelare matematică este influențată de o serie de **aspecte psihologice**, cum ar fi motivația intrinsecă, încrederea în propriile abilități, flexibilitatea cognitivă, creativitatea și capacitatea de a aborda probleme complexe în mod sistematic. Studiile arată că implicarea activă a elevilor în procesul de modelare matematică contribuie la formarea perseverenței, a atenției concentrate și a gândirii strategice, calități necesare în numeroase domenii profesionale.

Pe lângă acestea, **aspectele educaționale** au un rol central în eficiența predării și învățării modelării matematice. Alegerea metodelor didactice trebuie să favorizeze învățarea activă și colaborativă, integrarea tehnologiilor informatice pentru simulare și vizualizare, precum și utilizarea studiilor de caz și a problemelor interdisciplinare. Strategiile de evaluare trebuie să fie variate, incluzând atât evaluarea procesului de gândire și a metodei folosite, cât și a corectitudinii rezultatelor obținute. În acest context, profesorul devine nu doar un furnizor de cunoștințe, ci și un facilitator al procesului de descoperire și aplicare a modelelor matematice în viața reală.

Astfel, competența de modelare matematică nu reprezintă doar un obiectiv al învățării matematice, ci și un instrument indispensabil pentru înțelegerea și explicarea fenomenelor din diverse domenii, pregătind elevii și studenții pentru provocările unei societăți bazate pe date, raționamente logice și luarea deciziilor informate.

Având în vedere aceste dimensiuni didactice, psihologice și educaționale, este necesar să analizăm și paradigmele moderne care integrează modelarea matematică în contexte interdisciplinare, oferind un cadru unitar pentru aplicarea cunoștințelor în situații reale. Ghidul [6] este menit să ajute la definirea competențelor esențiale care trebuie incluse

în experiențele elevilor și oferă direcții pentru îmbunătățirea educației în modelarea matematică la toate nivelurile.

În ultimii ani, abordările educaționale centrate pe modelarea matematică au fost integrate în paradigme inovatoare precum interdisciplinaritatea și modelul. Aceste paradigme promovează o învățare complexă, în care conceptele matematice nu sunt studiate izolat, ci în conexiune cu științele, tehnologia, ingineria și artele. Interdisciplinaritatea presupune colaborarea între discipline diferite pentru a rezolva probleme reale, folosind modelarea matematică drept punte între cunoștințele teoretice și aplicabilitatea lor practică [4].

Modelul STEAM adaugă dimensiunea creativă și artistică la domeniile tradiționale STEM, ceea ce încurajează gândirea critică, inovația și adaptabilitatea elevilor. În acest cadru, modelarea matematică nu este doar un instrument de calcul sau reprezentare, ci devine un proces de explorare, analiză și comunicare a soluțiilor într-un mod vizual, creativ și funcțional.

Exemple de paradigme bazate pe modelare includ:

- **Învățarea prin proiecte interdisciplinare** – elevii realizează proiecte care implică simultan concepte din matematică, fizică și informatică (ex.: proiectarea unui pod din materiale simple, analizând rezistența acestuia).
- **Modelarea statistică în științele sociale** – utilizarea datelor reale pentru a analiza fenomene economice, demografice sau sociale (ex.: studii despre consumul de energie într-o comunitate).
- **Simulările digitale** – folosirea software-ului de modelare 3D sau a aplicațiilor de simulare fizică pentru a rezolva probleme ingineresti sau arhitecturale.
- **Arte și matematică** – integrarea geometriei în design grafic, arhitectură sau artă digitală, pentru crearea unor produse estetice și funcționale.
- **Educația ecologică prin modelare** – analizarea impactului poluării asupra ecosistemelor prin modele matematice și grafice predictive.

Integrarea acestor paradigme în procesul de predare-învățare ajută elevii să înțeleagă legătura dintre matematică și viața reală, să dezvolte competențe transversale și să își formeze o gândire flexibilă, esențială pentru profesiile viitorului. Prin colaborare interdisciplinară, elevii sunt încurajați să gândească „dincolo de manual”, să abordeze probleme complexe și să utilizeze tehnologia, arta și știința ca instrumente complementare [7].

În contextul dezvoltării competenței de modelare matematică, pe lângă abordările curriculare, paradigmele interdisciplinare și aspectele psihologice și educaționale prezentate anterior, este esențial să analizăm și modalitățile prin care aceste competențe sunt evaluate și consolidate în afara orelor de curs. Evaluările internaționale, precum PISA, oferă un reper obiectiv privind nivelul de pregătire al elevilor în aplicarea gândirii

matematice în contexte reale, iar activitățile extracurriculare creează oportunități suplimentare pentru exersarea și aprofundarea acestor abilități într-un cadru flexibil și stimulativ.

În ceea ce privește competența de modelare matematică, **evaluările PISA** se concentrează pe abilitatea elevilor de a parcurge etapele procesului de matematizare: identificarea și formularea problemei, construirea modelului matematic, rezolvarea acestuia, interpretarea și validarea rezultatelor în raport cu situația reală. Sarcinile propuse implică adesea contexte interdisciplinare, precum analiza tendințelor economice, interpretarea fenomenelor naturale sau optimizarea unor procese tehnice.

Rezultatele obținute de țările participante relevă diferențe semnificative în nivelul de pregătire al elevilor, corelate cu structura curriculumului, metodele de predare, gradul de integrare a situațiilor reale în învățare și disponibilitatea resurselor educaționale. Pentru Republica Moldova, analiza datelor PISA poate constitui un punct de plecare pentru adaptarea strategiilor didactice și pentru consolidarea legăturii dintre învățământul preuniversitar și cel universitar, printr-o atenție sporită acordată modelării matematice ca instrument practic de înțelegere a lumii contemporane.

Activitățile extracurriculare joacă un rol esențial în dezvoltarea competenței de modelare matematică, oferind elevilor oportunități de învățare într-un cadru mai flexibil, creativ și aplicativ decât cel formal. Prin natura lor, acestea stimulează implicarea voluntară, motivația intrinsecă și capacitatea de a lucra în echipă, elemente esențiale pentru succesul în rezolvarea problemelor complexe.

Forme relevante de activitate extracurriculară pentru dezvoltarea modelării matematice includ:

- Concursurile și olimpiadele de matematică – în special cele care conțin probe de aplicații practice și modelare;
- Proiectele interdisciplinare – care îmbină matematica cu fizica, informatica, economia sau artele, având ca scop rezolvarea unor probleme concrete;
- Cluburile de știință și matematică – în care elevii pot lucra la proiecte de simulare, analiză de date sau construcție de modele fizice și digitale;
- Parteneriate cu mediul economic și universitar – pentru realizarea de proiecte comune, stagii de pregătire și ateliere tematice;
- Taberele și workshopurile STEM/STEAM – care pun accent pe gândirea critică, creativitate și colaborare interdisciplinară.

Aceste activități contribuie la formarea unei gândiri matematice flexibile, ancorate în realitate, și creează punți între cunoștințele dobândite în școală și cerințele lumii profesionale. În plus, ele pot funcționa ca un spațiu de experimentare și inovare, unde greșelile sunt percepute ca oportunități de învățare, iar procesul are o valoare cel puțin egală cu rezultatul final.

Obiective ale cercetărilor orientate spre asigurarea continuității în formarea și dezvoltarea competenței de modelare matematică

Dezvoltarea competenței de modelare matematică este esențială în contextul obiectivelor educaționale promovate de Consiliul Europei, care subliniază importanța competențelor-cheie pentru învățarea pe tot parcursul vieții. Această competență contribuie la dezvoltarea abilităților de analiză și soluționare a problemelor complexe, aspecte fundamentale pentru cetățenia activă și incluziunea socială. Utilizarea modelelor matematice stimulează creativitatea și inițiativa, contribuind la dezvoltarea personală și profesională. Necesitatea asigurării unei continuități în formarea și dezvoltarea competenței de modelare matematică între învățământul preuniversitar și cel universitar se impune ca o condiție esențială pentru construirea unei baze solide de competențe. În lipsa acestei continuități, tranziția între niveluri educaționale poate genera decalaje de cunoștințe, competențe fragmentate și dificultăți în integrarea noilor concepte. În acest context este importantă atingerea următoarelor obiective:

- ✓ Analiza calitativă a procesului de dobândire a competenței de modelare matematică de către elevi și studenți.
- ✓ Dezvoltarea unui cadru pedagogic integrat pentru predarea modelării matematice care să poată fi replicat în alte sisteme educaționale;
- ✓ Crearea de resurse didactice adaptate competenței de modelare matematică de către elevi și studenți.
- ✓ Elaborarea de recomandări privind îmbunătățirea curriculumului și a tranziției dintre ciclurile de învățământ, precum și recomandări pentru integrarea competenței de modelare matematică în procesul educațional.
- ✓ Crearea de conținut educațional care să sprijine predarea-învățarea modelării matematice.

Conexiunea coerentă între curriculum-ul liceal și cel universitar, precum și abordarea metodologică unitară, reprezintă premise pentru formarea unor specialiști capabili să utilizeze matematica nu doar ca un set de tehnici, ci ca un instrument de interpretare și modelare a realității.

Concluzii

Formarea competenței de modelare matematică, din perspectiva asigurării continuității între învățământul preuniversitar și cel universitar, reprezintă un demers strategic ce vizează pregătirea elevilor și studenților pentru a răspunde provocărilor complexe ale societății contemporane. Analiza teoretică și practică realizată evidențiază faptul că modelarea matematică este mai mult decât o abilitate tehnică – ea constituie un proces cognitiv și creativ, care implică identificarea, matematizarea, rezolvarea și interpretarea problemelor reale într-un cadru interdisciplinar.

Integrarea coerentă a modelării matematice în curriculum, adaptarea metodelor didactice la nevoile și stilurile de învățare ale elevilor, utilizarea tehnologiilor moderne, precum și valorificarea activităților extracurriculare și a evaluărilor internaționale sunt elemente-cheie pentru dezvoltarea unei competențe autentice. Rezultatele obținute la evaluările PISA sau în competițiile de profil pot fi utilizate nu doar ca indicatori ai performanței, ci și ca instrumente de diagnostică pentru îmbunătățirea strategiilor educaționale.

Asigurarea unei tranziții fluide între învățământul preuniversitar și cel universitar presupune nu doar alinierea conținuturilor, ci și cultivarea unei atitudini pozitive față de matematică, a motivației intrinseci și a capacității de a gândi critic și creativ. În acest fel, modelarea matematică devine nu doar o componentă a educației matematice, ci și un instrument indispensabil pentru participarea activă, inovatoare și responsabilă la viața economică, socială și științifică.

Lucrarea a fost elaborată cu suportul proiectului „Asigurarea continuității în formarea și dezvoltarea competenței de modelare matematică”, cifrul proiectului 25.80012.0807.66SE, finanțat de ANCD

Bibliografie

1. ASEMPAPA, R. S., STURGILL, D. R. Mathematical Modeling: Issues and Challenges in Mathematics Education and Teaching. In: *Journal of Mathematics Research*, Vol. 11, No. 5, October. Published by Canadian Center of Science and Education.
2. BLOMHOEJ, M., HØJGAARD, T. Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. In: *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22. pp. 123-139. 10.1093/teamat/22.3.123.
3. BLUM, W., LEISS, D. How Do Students and Teachers Deal with Mathematical Modelling Problems? The Example Sugaloaf und the DISUM Project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12) – Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood.
4. CHAPPELL, K., DUCA, E., HETHERINGTON, L., JUILLARD, S., AGUIRRE, C. A framework for effective STEAM education: Pedagogy for responding to wicked problems.
5. CHIRIAC, L., MIHĂLACHE, L., COZMA, D., AFANAS, D., SALI, L., TELEUCĂ, M. *Elaborarea și rezolvarea modelelor matematice*. Chișinău: Tipografia UPSC, 2023. 94p. ISBN 978-9975-46-808-4 (6,3 c.a.)
6. GAIMME. Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education. Second edition. Consortium for Mathematics and its Applications

- (COMAP), *Society for Industrial and Applied Mathematics* (SIAM), USA, 2019. – 236 p. ISBN: 978-1-611975-73-4, eISBN: 978-1-611975-74-1.
7. HANIN, V., VAN NIEUWENHOVEN, C. Developing an Expert and Reflexive Approach to Problem-Solving: The Place of Emotional Knowledge and Skills. In: *Psychology*, 9, pp. 280–309. <https://doi.org/10.4236/psych.2018.92018>
 8. HIRSCH, C. R. (Ed.). *Mathematical modeling and modeling mathematics: Annual perspectives in mathematical education*, 2016. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
 9. NISS, M. A., & HØJGAARD, T. (Eds.). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde Universitet. IMFUFA-tekst: i, om og med matematik og fysik No. 485. <http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/>
 10. TELEUCĂ, M., SALI, L., CIOBAN-PILEȚCAIA, A. Dezvoltarea abilităților de modelare matematică. In: *Conference on Applied and Industrial Mathematics: CAIM 2022*, Chișinău, 2022, Ediția a 29, pp. 206-211. ISBN 978-9975-76-401-8.

UDC: 37.091.3:51-3

STRATEGII DE TRANSPUNERE DIDACTICĂ A CONȚINUTURILOR GEOMETRICE CU IMPACT ASUPRA PERFORMANȚEI ELEVILOR DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL GIMNAZIAL

Larisa SALI, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0003-1172-3055>

e-mail: sali.larisa@upsc.md

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Republica Moldova

Marcel TELEUCA, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0003-1730-5284>

e-mail: marcel.teleuca@math.usm.md

Universitatea de Stat din Moldova, IMI „V. Andrunachievici”

Rezumat. În articol sunt expuse opiniile autorilor privind transpunerea didactică a conținuturilor de geometrie în gimnaziu. În particular, este analizată o modalitate de tratare didactică a temei „Inegalitatea triunghiului” și propuse strategii de realizare a design-ului unor activități cu impact asupra performanțelor elevilor de gimnaziu.

Cuvinte cheie: transpunere didactică, competență matematică, strategii didactice, inegalitatea triunghiului.

STRATEGIES FOR DIDACTIC TRANSPOSITION OF THE GEOMETRIC CONTENTS WITH AN IMPACT ON THE PERFORMANCE OF STUDENTS IN LOWER SECONDARY EDUCATION

Summary. The article presents the authors' opinions on the didactic transposition of geometry content in middle school. In particular, it analyzes a didactic approach to the topic of 'Triangle Inequality' and proposes strategies for designing activities with impact on the performance of middle school students.

Keywords: didactic transposition, mathematical competence, didactic strategies, triangle inequality.

Introducere

Datorită relevanței sale istorice și a relației cu realitatea, geometria joacă un rol important în învățarea și predarea matematicii, și astfel, și în educația matematică. Atât influențele practice, cât și cele teoretice condiționează inovațiile continue în învățarea și predarea geometriei. În ultimele decenii, au existat decizii și reforme de politică educațională, precum și influențe ale unor realizări și invenții noi care afectează educația matematică. Apar întrebări la toate compartimentele, dar în special pentru domeniul geometriei, care este bogat prin parcursul istoric și conexiunea cu alte domenii. Cum pot fi corelate originile ei cu noile tendințe și inovații?

1. Probleme ale didacticii geometriei

Autorii publicației [2] menționează faptul că ponderea studiilor dedicate didacticii geometriei în reviste din domeniul educației matematice cotate la nivel internațional este mică.

Printre problemele didacticii geometriei semnalate în literatura de specialitate sunt următoarele patru categorii.

1. Pornind de la structura textelor în manualele școlare: abstractizarea excesivă; predominanța abordărilor tradiționale; accent pe rezultate, nu pe proces; fragmentarea conținuturilor care reduce coerența și aplicabilitatea în contexte interdisciplinare; lipsa contextualizării.
2. Din perspectiva transpunerii didactice și organizării procesului de predare: utilizare insuficientă a materialelor vizuale și manipulabile; integrarea limitată a tehnologiei cu activități *hands-on* pentru a crea medii de învățare echilibrate și stimulative; atenție redusă dezvoltării abilităților de lecturare a textelor matematice; limitarea în timp a comunicării între elevi și luarea deciziilor în procesul de învățare colaborativă a geometriei.
3. Din perspectiva procesului de învățare: transfer limitat al cunoștințelor; percepția de inutilitate care afectează motivația și implicarea; lipsa evaluării formative și a feedback-ului constructiv; lipsa progresului cognitiv - din cauza neparcurgerii complete a etapelor modelului Van Hiele se constată blocaje în raționamentul geometric.
4. Din perspectiva abordării psihodidactice a educației matematice: insuficiența studiilor care reflectă relațiile între formarea reprezentărilor spațiale prin experiențe de imagistica mentală și dezvoltarea gândirii geometrice; neclaritate în ce privește raportul optim între predarea-învățarea geometriei în mediul virtual versus mediul fizic real (în dozarea timpului și a volumului conținuturilor care vor fi vizate); cum influențează dezvoltarea competențelor matematice studiul separat al geometriei plane și a stereometriei; care sunt particularitățile psihofiziologice ale studierii eficiente a geometriei de către generația de copii digitali-nativi.

2. Strategii de transpunere didactică a geometriei în gimnaziu

În Republica Moldova, manualul școlar aprobat pentru utilizare la nivel național trebuie să contribuie la diminuarea dificultăților nominalizate în primele trei categorii de probleme.

În procesul de învățare a matematicii, elevul trebuie nu doar să urmărească și să înțeleagă raționamentele profesorului, ci este indicat ca el să lectureze texte matematice pentru a-și aprofunda sau extinde cunoștințele. Studii recente care se concentrează pe predarea-învățarea geometriei subliniază legătura dintre dezvoltarea limbajului și înțelegerea geometriei. Remarcăm că rapoartele cu privire la rezultatele evaluărilor demonstrează că elevii nu dețin într-o măsură suficientă abilitatea de a lectura textele, inclusiv cele de geometrie. Autorii studiului [10] formulează două dimensiuni ale unui cadru pentru evaluarea înțelegerii textelor cu privire la construcțiile geometrice: înțelegerea

textelor lecturate și extragerea esenței matematice din acestea. Lucrarea [3] se concentrează pe examinarea comportamentului studenților când li se propune sarcina de a lectura texte geometrice în combinație cu reprezentări figurative. Autorii raportează că marea majoritate a participanților citesc textul înainte de a inspecta figura și concluzionează că textul influențează în mod prioritar procesarea informației.

Manualele digitale interactive trebuie să tindă să acopere lacunele de tipul celor indicate în fiecare dintre categoriile menționate.

Ținând cont de necesitatea soluționării acestor categorii de probleme, vom nominaliza anumite strategii de transpunere didactică a geometriei în gimnaziu, care trebuie să fie obiectul atenției autorilor manualelor și auxiliarelor didactice la matematică și al profesorilor practicieni (fără a considera că lista este epuizată):

- Contextualizarea conținuturilor geometrice;
- Transpunerea conținuturilor prin *storytelling* matematic;
- Abordarea epistemologică a tratării conținuturilor și includerea elementelor de istorism;
- Formarea de abilități metacognitive și reflexive în procesul studierii geometriei;
- Abordarea diferențiată de nivel, de profil;
- Abordarea individualizată din perspectiva particularităților psihofiziologice;
- Învățarea prin descoperire și investigare;
- Integrarea evaluării formative în predare-învățare;
- Utilizarea tehnologiei și a realității augmentate;
- Vizualizarea și manipularea concretă a instrumentelor și modelelor reale și celor elaborate;
- Abordare colaborativă și învățarea prin cooperare;
- Gamificarea procesului educațional.

3. Sugestii pentru transpunerea didactică la tema „Inegalitatea triunghiului”

I. Pentru evocare propunem vizualizarea și manipularea concretă a instrumentelor și modelelor cu scopul de a evidenția unele proprietăți pregătitoare importante:

1. Cea mai scurtă cale între două puncte este un segment de linie dreaptă.
2. Pe orice semidreaptă de la originea ei se poate depune un segment de lungime dată și numai unul singur.
3. Lungimea unui segment este mai mică decât lungimea oricărei linii poligonale care are extremitățile segmentului ca vârfuri.
4. Dacă dintr-un punct, luat în afara unei drepte, ducem la aceasta o perpendiculară și o oblică, atunci perpendiculara este mai scurtă decât oblica.
5. Dintre două oblice, este mai lungă cea al cărei picior este mai îndepărtat de piciorul perpendicularei.

6. În plan, există o infinitate de puncte care se află la distanța dată de la un punct dat.
7. Mulțimea tuturor punctelor care se află la o distanță constantă r de la un punct fix O reprezintă un cerc cu centrul O și raza r .
8. Dacă un poligon convex este înconjurat de un alt poligon, atunci perimetrul poligonului interior este mai mic decât perimetrul poligonului exterior.
9. Într-un triunghi cu două laturi necongruente, acestora li se opun unghiuri necongruente, și anume: la latura cea mai mare se opune unghiul cel mai mare.
10. Dacă mutăm un vârf al triunghiului în interiorul acestuia, atunci noul triunghi are perimetrul mai mic și unghiul din acel vârf mai mare.
11. Dacă două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ au corespunzător laturile congruente $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ și $BC > B'C'$, atunci $\angle A > \angle A'$. Este adevărată și propoziția reciprocă.
12. Transformări care păstrează măsura unghiurilor și a dimensiunile metrice (izogonale și izometrice). Proprietăți.

II. Formarea de abilități metacognitive și reflexive la etapa de evocare

1. Punctele A și B se află la distanța 4 cm unul de celălalt. Stabiliți dacă există puncte pentru care sunt satisfăcute cerințele:
 - a) punctele sunt situate la distanța 2 cm de la punctul A și la distanța 2 cm de punctul B ;
 - b) punctele sunt situate la distanța 1 cm de la punctul A și la distanța 3 cm de punctul B ;
 - c) punctele sunt situate la distanța 3 cm de la punctul A și la distanța 2 cm de punctul B ;
 - d) punctele sunt situate la distanța 4 cm de la punctul A și la distanța 2 cm de punctul B ;
 - e) punctele sunt situate la distanța 6 cm de la punctul A și la distanța 2 cm de punctul B ;
 - f) punctele sunt situate la distanța 7 cm de la punctul A și la distanța 2 cm de punctul B .
2. Dreapta a conține punctele A și B , iar punctul M nu aparține acestei drepte. Construiți, în același semiplan cu punctul M , toate triunghiurile care au latura comună $AB = 6$, iar celelalte două laturi au lungimile numere întregi.
3. În triunghiul ABC se dă $AC = 3,8\text{ cm}$ și $AB = 0,6\text{ cm}$. Se știe că lungimea laturii BC este un număr întreg. Care este lungimea laturii BC ?
4. În interiorul triunghiului ABC laturile reflectă lumina. Arătați cum se reflectă raza de lumină care pornește din punctul M și cade în punctul N . Arătați punctul în care raza

reflectată cade prima oară pe o latură a triunghiului. Examinați diverse poziții ale punctelor și diverse tipuri de triunghiuri.

5. De la orașul A până la orașul B sunt 660 km , de la orașul A la satul C sunt 310 km , de la satul C la satul D sunt 200 km și de la D la B sunt 150 km . Care este distanța de la C la B ? (Localitățile sunt poziționate pe o linie dreaptă, prin urmare $CB = 350\text{ km}$).
6. În țară sunt 4 orașe: A, B, C și D . Două avioane au decolat simultan din orașul A . Traseul primului avion este: $A - B - D - C - A - D - B - C - A$, iar traseul celui de-al doilea: $A - B - C - D - A - B - C - D - A - B - C - D - A$. Care dintre avioane va survola mai repede traseul, dacă vitezele lor sunt aceleași? (Primul avion va sosi mai devreme.)

Problemele pot fi examinate și cu utilizarea tehnologiei și a realității augmentate.

III. Abordarea epistemologică și includerea elementelor de istorism

Una dintre cele mai răspândite modalități de a demonstra inegalitățile geometrice constă în aplicarea inegalității triunghiului, posibil cu anumite considerații suplimentare. Inegalitatea triunghiului este cea mai faimoasă și mai fundamentală inegalitate geometrică. Teorema care prezintă inegalitatea triunghiului este enunțată în *Elementele* lui Euclid, în Cartea I, Proprietatea 20:

[...] în triunghiul ABC , suma oricăror două laturi este mai mare decât latura rămasă, adică, suma BA și AC este mai mare decât BC , suma AB și BC este mai mare decât AC , iar suma BC și CA este mai mare decât AB .

Euclid a demonstrat inegalitatea triunghiului pentru distanțe în geometria plană folosind construcția figurilor. Pornind de la triunghiul ABC , se construiește un triunghi isoscel cu o latură laterală fiind BC , iar cealaltă BD fiind depusă pe prelungirea laturii AB (Figura 1).

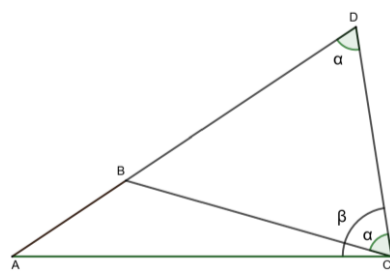


Figura 1

Se argumentează că unghiul β are măsura mai mare decât unghiul α , astfel $AD > AC$. Așadar, $AD = AB + BD = AB + BC$, prin urmare $AC < AB + BC$.

IV. Integrarea evaluării formative în predare-învățare

Se propun spre demonstrare independentă câteva proprietăți care se bazează pe utilizarea inegalității triunghiului. Pentru a asigura feedback sunt propuse modalități de demonstrare și expunere textuală a demonstrației.

Proprietatea 1. Demonstrați că pentru oricare trei puncte necoliniare A, B și C este satisfăcută inegalitatea $AB \geq |AC - BC|$.

Demonstrație: Relația se obține din inegalitatea triunghiului prin trecerea unui termen dintr-un membru al inegalității în celălalt, valoarea absolută a diferenței fiind necesară, ținând cont de faptul că distanța este nenegativă.

O reformulare a acestei proprietăți este: *Lungimea oricărei laturi a unui triunghi nu este mai mică decât modulul diferenței de lungimi a celorlalte două laturi.*

Proprietatea 2. Demonstrați că lungimea oricărei laturi a unui triunghi nu depășește semiperimetrul său.

Demonstrație: Notăm lungimile laturilor triunghiului prin a, b, c . Deoarece $b + c > a$, atunci $a + b + c > 2a$. Prin urmare $a < \frac{a+b+c}{2} = p$.

Proprietatea 3. Demonstrați că într-un patrulater convex suma lungimilor diagonalelor este mai mare decât semiperimetrul său și mai mică decât perimetrul.

Demonstrație: Fie dat patrulaterul convex $ABCD$ (Figura 2). Atunci diagonalele sale se intersectează.

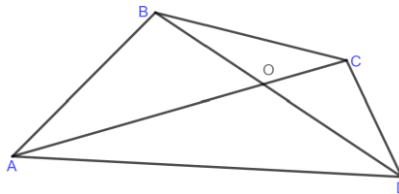


Figura 2

Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Inegalitățile necesare se obțin ușor din inegalitățile triunghiului pentru triunghiurile $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$ și pentru $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$.

Scriem inegalitatea triunghiului după cum urmează:

În $\triangle ABO$: $AB < AO + BO$; în $\triangle BCO$: $BC < BO + CO$; în $\triangle CDO$: $CD < CO + DO$; în $\triangle ADO$: $AD < DO + AO$. Adunăm membru cu membru inegalitățile:

$$AB + BC + CD + AD < 2(AO + BO + CO + DO).$$

$$\text{Astfel } P_{ABCD} < 2(AC + BD) \Rightarrow \frac{1}{2} P_{ABCD} < AC + BD. \quad (1)$$

Scriem inegalitatea triunghiului după cum urmează:

În $\triangle ABC$: $AC < AB + BC$; în $\triangle ADC$: $AC < AD + DC$; în $\triangle BCD$: $BD < BC + CD$; în $\triangle BAD$: $BD < DA + AB$.

Adunăm membru cu membru inegalitățile:

$$2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA).$$

$$\text{Astfel } AC + BD < P_{ABCD}. \quad (2)$$

Din inegalitățile (1) și (2) rezultă inegalitatea $\frac{1}{2} P_{ABCD} < AC + BD < P_{ABCD}$.

Proprietatea 4. Oricare mediană a unui triunghi este mai mică decât semisuma laturilor alăturate.

Demonstrație: Fie AM este mediană în triunghiul ABC (Figura 3). Construim punctul A' , simetricul punctului A în raport cu centrul M .

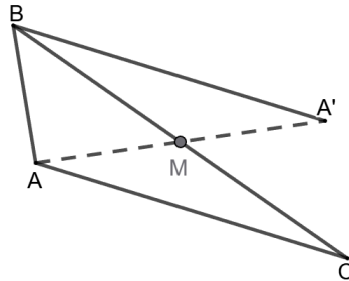


Figura 3

Constatări	Justificări
1) $AM = A'M$	1. Definiția simetriei centrale.
2) $ABA'C$ – paralelogram.	2. Diagonalele AA' și BC ale patrulaterului $ABA'C$ se înjumătățesc în M .
3) $AA' < AB + BA'$	3. Inegalitatea triunghiului în $\triangle ABA'$
4) $2 \cdot AM < AB + BA'$	4. Din 1).
5) $AC = BA'$	5. AC, BA' - laturi opuse ale paralelogramului $ABA'C$.
6) $AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$	6. Din 4) și 5).

Proprietatea 5. Dacă AM este mediană în triunghiul ABC , atunci $AB < AC \Rightarrow m(\sphericalangle MAB) > m(\sphericalangle MAC)$.

Demonstrație: Construim punctul A' - simetricul punctului A în raport cu centrul M (Figura 3).

Constatări	Justificări
1) $\triangle AMC = \triangle A'MB$	1. LUL
2) $m(\sphericalangle MAC) = m(\sphericalangle MA'B)$	2. Din 1)
3) $AB < BA' = AC \Rightarrow m(\sphericalangle MAB) > m(\sphericalangle MA'B) = m(\sphericalangle MAC)$	3. În orice triunghi laturii mai mici îi corespunde un unghi opus mai mic.

V. Abordare colaborativă și învățarea prin cooperare

O modalitate de organizare a activității de învățare prin colaborare și cooperare este descrisă în lucrarea [9]. Problemele expuse în continuare pot fi propuse elevilor în acest caz.

1. Găsiți în interiorul unui patrulater convex un punct, astfel încât suma distanțelor de la acesta la vârfuri să fie minimă.

Soluție. Fie dat patrulaterul convex $ABCD$ (Figura 4). Diagonalele sale se intersectează. Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Suma distanțelor de la O la vârfuri este egală cu suma lungimilor diagonalelor AC și BD . Dar pentru orice alt punct P avem, pe de-o parte, că suma

distanțelor de la P la vârfuri nu este mai mică decât $AC + BD$, iar pe de altă parte, fie $PA + PC > AC$, fie $PB + PD > BD$. Așadar, această sumă este egală cu $AC + BD$ doar dacă P coincide cu punctul O . Prin urmare, punctul O este punctul căutat.

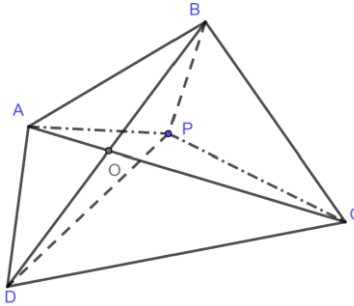


Figura 4

2. În același plan se consideră pătratul $ABCD$ și un punct O (Figura 5). Demonstrați că distanța de la punctul O la oricare dintre vârfurile pătratului nu depășește suma distanțelor de la O la celelalte trei vârfuri ale pătratului.

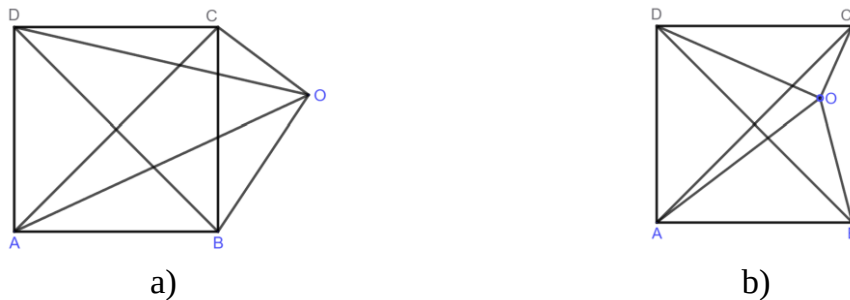


Figura 5

Soluție. Scriem inegalități ale triunghiului pentru triunghiurile ΔAOC și ΔBOD :

$$AC + OC > OA \text{ și } OB + OD > BD.$$

Adunăm inegalitățile și avem $AC + OC + OB + OD > OA + BD$.

Deoarece $AC = BD$, obținem ceea ce este necesar: $OC + OB + OD > OA$.

Observăm că relația este validă pentru ambele poziții ale punctului O – în exteriorul pătratului sau în interiorul acestuia.

3. Demonstrați că într-un pentagon convex suma lungimilor diagonalelor este mai mare decât perimetrul și mai mică decât dublul perimetrului. (Demonstrația este analogă demonstrației Proprietății 3.)

4. În interiorul unui triunghi au fost luate două puncte oarecare. Demonstrați că distanța dintre ele nu depășește semiperimetrul triunghiului.

Soluție. Fie triunghiul ABC și punctele D, E situate în interiorul triunghiului (Figura 6). Continuăm segmentul DE care leagă aceste puncte în ambele direcții până la intersecția cu conturul triunghiului. Fie $DE \cap [AB] = \{H\}$ și $DE \cap [BC] = \{K\}$. Cel puțin unul dintre aceste puncte nu va coincide cu careva vârf al triunghiului ABC . Constatăm că $DE < HK$. Scriem inegalitatea triunghiului pentru triunghiul ΔHBK :

$HK < BH + BK$. De asemenea, din patrulaterul $HACK$ avem $HK < HA + AC + CK$.

Atunci $2HK < BH + HA + AC + CK + BK = BA + AC + CB = p_{ABC}$.

Prin urmare, $HK < \frac{1}{2}p_{ABC}$.

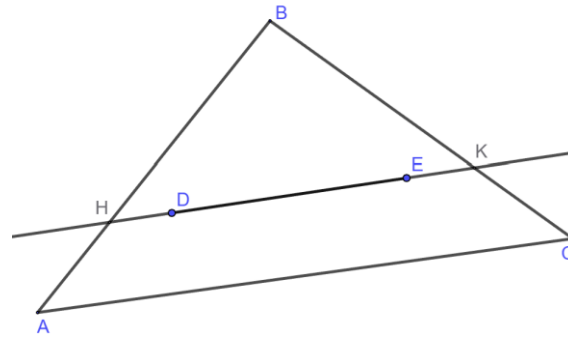


Figura 6

VI. Învățarea prin descoperire și investigare

Pentru acest compartiment vom propune probleme care sunt utile pentru consolidarea competențelor dobândite anterior sau probleme propuse la olimpiade și competiții matematice.

1. Punctul A , situat în interiorul unui unghi ascuțit, este reflectat simetric în raport cu laturile unghiului (Figura 7). Punctele B și C obținute au fost unite și la intersecția segmentului cu laturile unghiului au fost notate punctele D și E . Demonstrați că $DE < \frac{BC}{2}$.

Soluție. Scriem inegalitatea triunghiului în $\triangle ADE$: $DE < AD + AE$. Adăugăm DE în ambii membri ai inegalității. Atunci $2DE < AD + AE + DE$. Dar $AD = BD$ și $AE = EC$ din motive de simetrie. Prin urmare $2DE < BC$ și $DE < \frac{BC}{2}$.

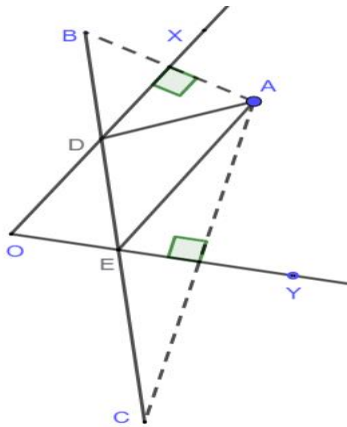


Figura 7

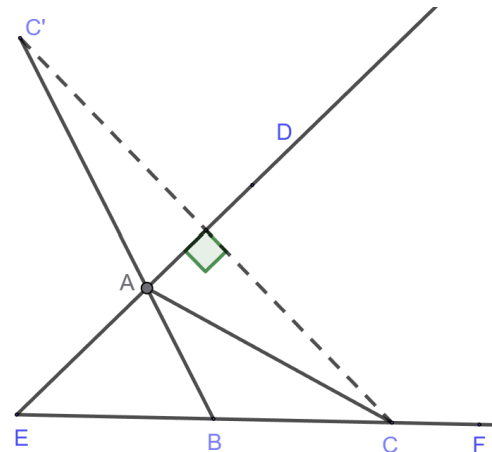


Figura 8

2. (Olimpiada Națională, Republica Moldova, clasa a VII-a, 2002) Fie dat unghiul ascuțit $\angle DEF$. Punctele B și C sunt situate pe semidreapta $(EF$ și punctul variabil A pe semidreapta $(ED$ (Figura 8). Să se determine poziția punctului A pe semidreapta $(ED$, astfel încât suma $AB + AC$ să fie minimă.

Soluție. Construim punctul C' simetric punctului C în raport cu dreapta ED (Figura 8). Trasăm segmentul BC' și găsim punctul de intersecție al acestuia cu semidreapta ED .

Fie $ED \cap BC' = \{A\}$. Atunci $BC' = BA + AC'$.

Din considerente de simetrie, $AC' = AC$, prin urmare $BC' = BA + AC$.

Deoarece lungimea segmentului BC' reprezintă cea mai scurtă distanță dintre punctele B și C' , rezultă că poziția punctului A astfel determinată răspunde cerinței ca suma distanțelor $BA + AC$ să fie minimă. Același rezultat se obține când construim simetricul punctului B în raport cu dreapta ED .

3. (Olimpiada Națională, Republica Moldova, clasa a VII-a, 2003) Fie triunghiul ABC și punctele M, N, P situate respectiv pe laturile (BC) , (CA) și (AB) (Figura 9). Dacă p este semiperimetrul triunghiului ABC , să se arate că:

$$p < AM + BN + CP < 3p.$$

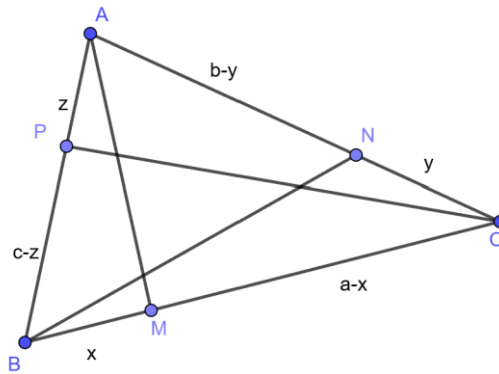


Figura 9

Soluție:

Fie $BC = a, AC = b, AB = c$ și $BM = x, CN = y, AP = z$.

Scriem inegalitatea triunghiului după cum urmează:

În $\triangle ABM$: $c < AM + x$ și $AM < c + x$. În $\triangle ACM$: $b < AM + a - x$ și $AM < b + a - x$.

În $\triangle ABN$: $c < BN + b - y$ și $BN < c + b - y$. În $\triangle CBN$: $a < BN + y$ și $BN < a + y$.

În $\triangle APC$: $b < CP + z$ și $CP < b + z$. În $\triangle BPC$: $a < CP + c - z$ și $CP < a + c - z$.

Adunăm membru cu membru inegalitățile:

$$a < CP + c - z; a < BN + y; b < AM + a - x; b < CP + z; c < BN + b - y; \\ c < AM + x.$$

Obținem $2a + 2b + 2c < 2AM + 2BN + 2CP + a + b + c$, prin urmare:

$$p < AM + BN + CP \quad (1).$$

Adunăm membru cu membru inegalitățile:

$$AM < c + x; AM < b + a - x; BN < c + b - y; BN < a + y; CP < b + z; \\ CP < a + c - z.$$

Obținem $2AM + 2BN + 2CP < 3a + 3b + 3c$, prin urmare:

$$AM + BN + CP < 3p. \quad (2)$$

Din inegalitățile (1) și (2) rezultă inegalitatea $p < AM + BN + CP < 3p$.

4. (Concursul D. Pompeiu, 2012, Botoșani) Dacă M este situat în interiorul unghiului XOY , să se determine punctele B și C , unde $B \in (OX)$, $C \in (OY)$ și $M \in (BC)$, astfel încât aria triunghiului BOC să fie minimă.

Soluție. Fie $B_0 \in (OX)$, $C_0 \in (OY)$ și M – mijlocul segmentului $[B_0C_0]$. Dreapta BC este o secantă, la care $B \in (OX)$, $C \in (OY)$ și trece prin M .

Vom cerceta două cazuri: $C \in (OC_0)$ și $C_0 \in (OC)$.

Cazul I. $C \in (OC_0)$ (Figura 10 a).

Trasăm dreapta $B_0P \parallel OY$ cu $P \in (BC)$.

Constatări	Justificări
2) $\triangle CMC_0 \equiv \triangle PMB_0$	1. Criteriul ULU: $[MC_0] \equiv [MB_0]$, $m(\angle CMC_0) = m(\angle PMB_0)$ – opuse la vârf $m(\angle MC_0C) = m(\angle MB_0P)$ – alterne interne formate de secanta B_0C_0 cu $B_0P \parallel OY$.
2) $A_{\triangle CMC_0} < A_{\triangle BMB_0}$	2. $A_{\triangle BMB_0} = A_{\triangle PMB_0} + A_{\triangle BPP_0} =$ $= A_{\triangle CMC_0} + A_{\triangle BPP_0}$
3) $A_{\triangle OBC} = A_{\triangle OB_0MC} + A_{\triangle MB_0B} >$ $> A_{\triangle OB_0MC} + A_{\triangle CMC_0} = A_{\triangle OB_0C_0}$	3. Proprietățile conceptului de arie și constatarea 2).

Cazul II. $C_0 \in (OC)$ (Figura 10 b).

Trasăm dreapta $C_0P \parallel OX$ cu $P \in (BC)$.

Constatări	Justificări
3) $\triangle PMC_0 \equiv \triangle BMB_0$	2. Criteriul ULU: $[MC_0] \equiv [MB_0]$ $m(\angle PMC_0) = m(\angle BMB_0)$ – opuse la vârf $m(\angle MC_0P) = m(\angle MB_0B)$ – alterne interne formate de secanta B_0C_0 cu $C_0P \parallel OX$.
2) $A_{\triangle BMB_0} < A_{\triangle CMC_0}$	2. $A_{\triangle CMC_0} = A_{\triangle PMC_0} + A_{\triangle CPC_0} =$ $= A_{\triangle BMB_0} + A_{\triangle CPC_0}$
3) $A_{\triangle OBC} = A_{\triangle OC_0MB} + A_{\triangle MC_0C} >$ $> A_{\triangle OC_0MB} + A_{\triangle BMB_0} = A_{\triangle OB_0C_0}$	3. Proprietățile conceptului de arie și constatarea 2).

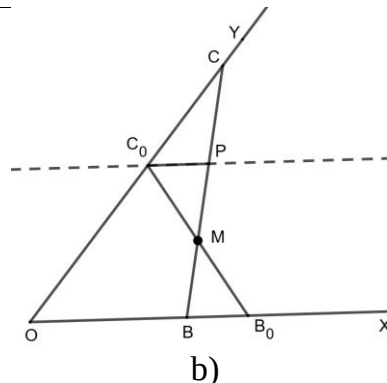
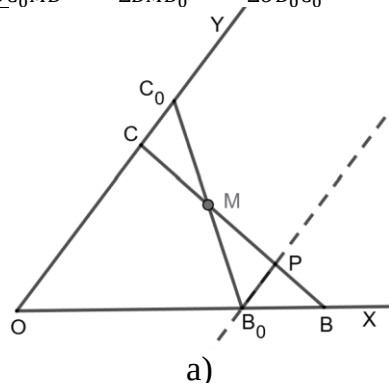


Figura 10

VII. Transpunerea conținuturilor prin storytelling matematic

La această rubrică propunem o serie de probleme dedicate aplicării simetriei în combinație cu inegalitatea triunghiului.

1. Un ciuperkar iese din pădure într-un punct stabilit. El trebuie să ajungă la șosea (care reprezintă o linie dreaptă) și să se întoarcă din nou în pădure într-un alt punct stabilit. Cum poate face acest lucru, parcurgând cel mai scurt drum?

Soluție. Fie A punctul în care ciuperkarul iese din pădure și B punctul în care trebuie să intre în pădure ulterior (Figura 11). Vom reflecta punctul A simetric față de șosea și vom obține punctul A' . Astfel, din orice traseu AKB (K este punctul în care ciuperkarul iese la șosea) se poate obține, reflectând simetric față de drum porțiunea AK , un drum de lungime egală $A'KB$, a cărui lungime, conform inegalității triunghiului, nu este mai mică decât $A'B$. Prin urmare, punctul căutat K , în care ciuperkarul trebuie să ajungă la drum, este punctul de intersecție a segmentului $A'B$ cu drumul.

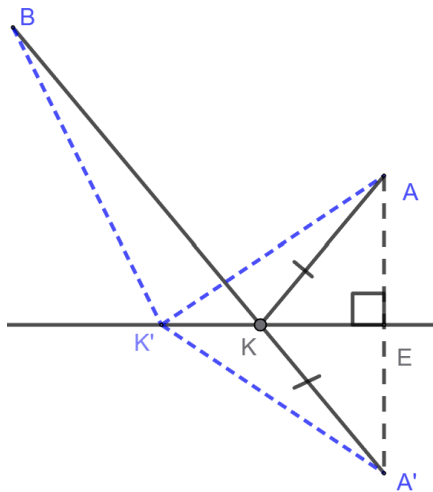


Figura 11

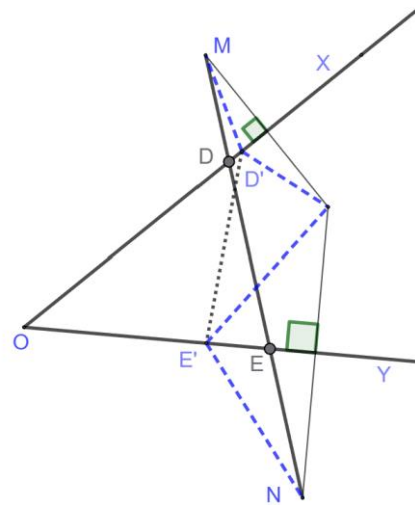


Figura 12

2. O peninsulă reprezintă un unghi ascuțit, în interiorul căreia se află casa pădurarului. Cum poate pădurarul, ieșind din casă, să ajungă la o margine a peninsulei, apoi la cealaltă și să se întoarcă acasă, parcurgând în acest timp cel mai scurt drum?

Soluție. Fie unghiul XOY reprezintă insula, iar punctul A este locul casei pădurarului. Reflectăm punctul A în raport cu marginile peninsulei: M este simetricul punctului A în raport cu dreapta OX și N este simetricul punctului A în raport cu OY . Găsim punctele de intersecție a segmentului MN cu OX și OY : $OX \cap MN = \{D\}$ și $OY \cap MN = \{E\}$. Punctele D și E sunt punctele pentru care distanța $AD + DE + EA = MN$ este minimă (Figura 12).

Oricare altă pereche de puncte $D' \in OX$ și $E' \in OY$ va conduce la trasarea unei linii poligonale $M - D' - E' - N$ care are lungimea mai mare decât segmentul

$$MN = AD + DE + EA.$$

3. Pe Figura 14 a) este reprezentată o cărămidă. Inventati o metodă de **măsurare** a diagonalei cărămidii, având la dispoziție încă două asemenea cărămizi și o riglă gradată.

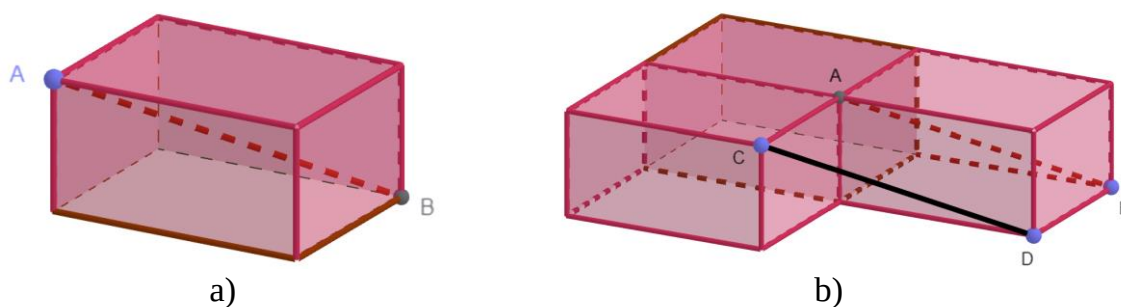


Figura 14

Soluție. Vezi figura 14 b).

4. O furnică se află în vârful N al cărămizii din Figura 15. În punctul M este o picătură de miere. Furnica se poate deplasa pe suprafața laterală a cărămizii, poate intersecta muchiile, dar nu se poate deplasa pe muchii sau pe fețele de sus și de jos. Care poate fi cel mai scurt traseu pentru deplasare ca furnica să ajungă la picătura de miere?

Soluție. Traseul furnicii poate fi vizualizat pe desfășurarea paralelipipedului (Figura 15).

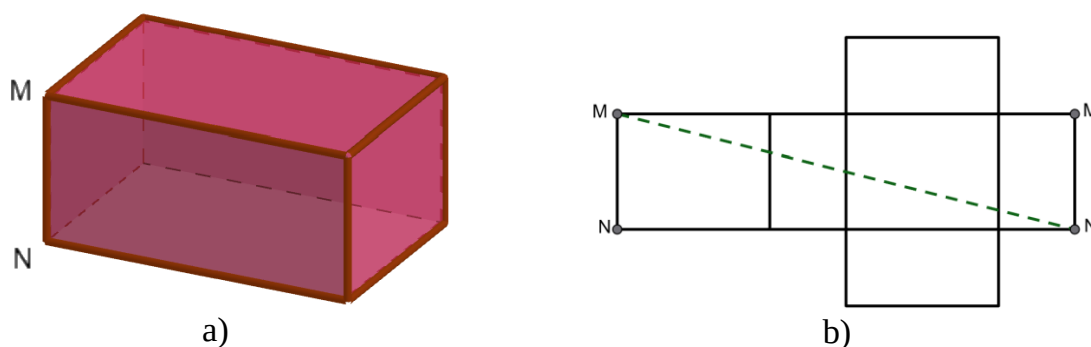


Figura 15

Concluzii

Abordarea diferențiată în educația matematică presupune valorificarea conținutului, abilităților și competențelor dobândite în sistemul de învățământ formal în contexte teoretice și practice. Activitatea extracurriculară la matematică are drept scop creșterea motivației pentru studiul acestei discipline, diversificarea ofertei educaționale, creșterea calității actului educațional, dezvoltarea gândirii critice, a creativității etc. Strategiile didactice se adaptează formelor specifice de organizare a procesului instructiv-educativ pentru tineri capabili de performanță înaltă, profilului de personalitate și gradului de maturitate psihologică ale acestora.

În această ordine de idei, este importantă elaborarea de resurse educaționale destinate activității extracurriculare la matematică, sprijinind în acest mod efortul cadrelor didactice orientat spre satisfacerea solicitărilor și a motivației beneficiarilor. Deschiderea oferită de activitățile extracurriculare la matematică în conformitate cu interesele elevilor, flexibilitatea conținuturilor planificate și adaptarea acestora în funcție de cerințele și interesele educatului crește cererea pentru astfel de servicii.

Lucrarea a fost elaborată cu suportul proiectului „Elaborarea resurselor didactice orientate spre sporirea performanței elevilor din gimnaziu la disciplina Matematica”, cifrul proiectului 25.80012.0807.69SE, finanțat de ANCD.

Bibliografie

1. BĂLĂUCĂ, A. Algebră. Geometrie. 1440 de probleme semnificative. Olimpiade, Concursuri și centre de excelență. 11 teme pentru Centrele de excelență. Clasa a VII-a. Ed. Taida.
2. JABLONSKI, S., LUDWIG, M. Teaching and Learning of Geometry—A Literature Review on Current Developments in Theory and Practice. In: *Education Sciences*. 2023, 13(7):682. <https://doi.org/10.3390/educsci13070682>.
3. LEE, W.K., WU, C.J. Eye Movements in Integrating Geometric Text and Figure: Scanpaths and Given-New Effects. In: *Int. J. Sci. Math. Educ.* 2018, 16, 699–714.
4. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. *Matematică. Curriculum pentru clasele a V-a - a IX-a*, aprobat prin ordinul MECC nr. 906 din 17.07.2019, implementat în clasele V-IX.
5. TELEUCĂ, M., IVANOV, A. *Probleme de geometrie competitivă*. România: Editura GIL, 2009. 225 p.
6. TELEUCĂ, M., SALI, L. Aspecte ale creării mediului de dezvoltare a elevilor capabili de performanțe înalte la matematică. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2023, nr. 2(32), pp. 93-102. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v32i2.93-102>.
7. TELEUCĂ, M., SALI, L. Didactizarea conținuturilor și dezvoltarea gândirii matematice. In: *Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale, (concept STEAM)*, Ed. Ediția a 3-a, 27-28 octombrie 2023. Chișinău: CEP UPSC, 2023. pp. 153-160. DOI: <https://doi.org/10.46727/c.steam-2023.p153-160>. ISBN 978-9975-46-813-8.
8. TELEUCĂ, M., SALI, L. Aspecte ale transpunerii didactice a conținuturilor pentru activitatea extracurriculară la matematică. simedianele triunghiului. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2024, nr. 2(36), pp. 123-133. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v36i2.123-133>.
9. TELEUCĂ, M., SALI, L. Ways to organize learning paths to discover solutions to competition problems. In: *Creative Mathematics and Informatics*. vol. 30 (2021), no. 2, p. 223-228. https://semnul.com/creative-mathematics/?page_id=208
10. YANG, K.L.; LI, J.L. A Framework for Assessing Reading Comprehension of Geometric Construction Texts. In: *Int. J. Sci. Math. Educ.* 2018, 16, 109–124.

UDC: 37.018.43:004.8

STRATEGII EFICIENTE DE PROIECTARE A PROMPT-URILOR: PRINCIPII FUNDAMENTALE PENTRU EDUCATORI DEBUTANȚI ÎN DOMENIUL INTELIGENȚEI ARTIFICIALE

Teodora VASCAN, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-6828-5343>

e-mail: vascan.teodora@upsc.md

Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Republica Moldova

Rezumat. Comunicarea dintre un utilizator și un model generativ seamănă cu un dialog între oameni. Cu cât interlocutorii își exprimă mai precis gândurile, cu atât le este mai ușor să se înțeleagă reciproc. Ingineria prompt-urilor, însă, rămâne un factor critic insuficient explorat în acest context. Acest articol detaliază componentele structurale ale prompt-urilor eficiente și demonstrează prin exemple aplicarea acestor elemente în scenarii practice în context educațional. Prin abordarea integrată dintre ingineria prompt-urilor și lingvistica aplicată, cercetarea deschide căi pentru utilizarea responsabilă și eficientă a LLMs-urilor, transformând potențialul teoretic în aplicații practice robuste.

Cuvinte cheie: Inteligența Artificială, educație, prompt, ingineria prompt-urilor.

EFFECTIVE PROMPT DESIGN STRATEGIES: FUNDAMENTAL PRINCIPLES FOR EDUCATORS BEGINNING IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Abstract. Communication between a user and a generative model resembles a dialogue between people. The more precisely the interlocutors express their thoughts, the easier it is for them to understand each other. Prompt engineering, however, remains a critical factor that has not been sufficiently explored in this context. This article details the structural components of effective prompts and demonstrates through examples the application of these elements in practical scenarios in an educational context. By integrating prompt engineering and applied linguistics, the research paves the way for the responsible and efficient use of LLMs, transforming theoretical potential into robust practical applications.

Keywords: Artificial Intelligence, education, prompt, prompt engineering.

Introducere

Prompt-ul este o solicitare text a utilizatorului către rețeaua neuronală. Poate include diferite elemente, dar nu neapărat toate deodată. Elementele structurale ale unui prompt sunt:

- ✓ *Instrucțiunea* este o condiție sau o sarcină pe care modelul trebuie să o îndeplinească.
- ✓ *Contextul* este o informație suplimentară de la utilizator, care va ajuta modelul să halucineze mai puțin.
- ✓ *Datele de intrare* sunt o întrebare la care o persoană caută un răspuns.
- ✓ *Indicatorul de ieșire* este formatul în care modelul trebuie să producă rezultatul.

Nu există o solicitare universală care să se potrivească fiecărei situații. În funcție de sarcină, putem adăuga informații la solicitare, putem seta stilul de răspuns sau restricții.

Nu există prompt-uri corecte sau incorecte. Unele prompt-uri ating obiectivul și răspund la întrebare. Pentru altele, modelul oferă informații false sau incomplete și uneori refuză să răspundă. Prompt-urile corecte multiplică probabilitatea ca utilizatorul să primească rezultatul corect în forma dorită. Acestea reduc timpul petrecut de o persoană interacționând cu rețeaua neuronală. De exemplu, dacă răspunsul ar trebui să fie sub forma unui tabel, putem specifica acest lucru în prompt și putem specifica în ce celule ar trebui distribuite informațiile.

Un exemplu despre cum ar putea arăta o formulă a unui prompt este reprezentat în figura 1.

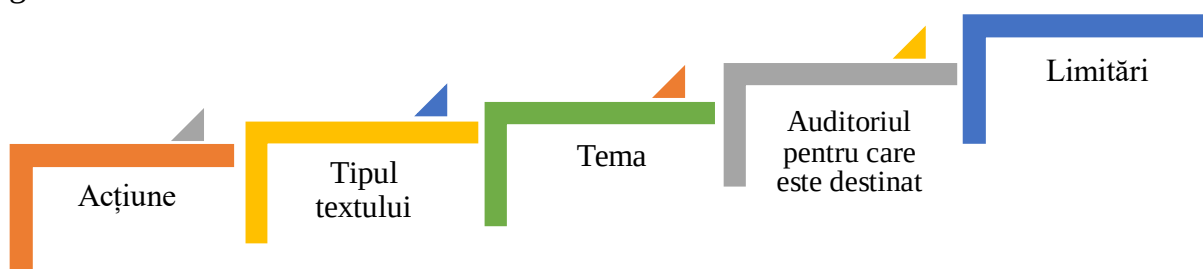


Figura 1. Structura unui prompt

Exemple de prompt-uri care respectă formula dată sunt incluse în tabelul 1.

Tabelul 1. Exemple de prompt-uri

Acțiune	Tipul textului	Tema	Auditoriul	Limite
Scrie	Un post	„5 cele mai bune profesii în anul 2025”	Pentru absolvenții instituțiilor generale de învățământ	Încadrează-te în 2000 de simboluri
Explică	Cuvântul	„Prompt”	Unui copil de 5 ani	În 2 paragrafe
Compune	O istorie	Despre copilul care a ratat Anul Nou din cauza jocurilor	Copiii care iubesc jocurile pe calculator	Încadrează-te în 5 propoziții
Creează	Teze pentru un discurs	Cum se dezvoltă Inteligența Artificială		Din 8 puncte

Formula dată poate fi extinsă sau scurtată — totul depinde de clasa de sarcini. De exemplu, putem adăuga detalii suplimentare, exemple pe care modelul le va folosi atunci când răspunde sau putem atribui roluri: „*Povestești-mi despre învățarea automată ca și cum ați fi profesor de fizică.*”

Orice semn, un cuvânt sau chiar un semn de punctuație, afectează răspunsul. Uneori, modelul are halucinații, dar natura minciunii poate fi controlată folosind o solicitare. De exemplu, vom arunca informații suplimentare către rețeaua neuronală pe care se va baza. Apoi, va trebui doar să facă ceea ce face bine - să scrie un text coerent. Nu este nevoie să întrebăm „Scrieți o poveste despre un comandant din războiul din 1812 și o prăjitură cu

același nume” și să-l punem pe model să ghicească. Este mai bine să clarificăm imediat: „Scrieți o poveste despre comandantul Napoleon Bonaparte”. Ar trebui să experimentăm întotdeauna și să adăugăm informații importante contextului. Comunicarea cu o rețea neuronală este ca și cum am lucra cu un motor de căutare, când utilizatorul selectează cuvinte pentru a obține rezultatul dorit de la serviciu.

Tipuri de prompt-uri

Universitatea Cornell a dezvoltat o scală general acceptată pentru clasificarea prompt-urilor [1], care include șase puncte:

- *Semantica intrării.* Utilizatorul oferă modelului reguli pe care acesta le reține și le ia în considerare atunci când răspunde. Acest lucru simplifică sintaxa și economisește timp. Exemplu de solicitare: „*Rețineți, când vă rog să construiți un traseu de la punctul A la B, voi introduce doar numele orașelor, iar dumneavoastră le veți înlocui cu A și B.*”
- *Configurarea ieșirii informațiilor.* Putem solicita modelului să afișeze informații conform unui șablon. Mai întâi, trebuie să încărcăm regulile în rețeaua neuronală, apoi să specificăm în solicitare când să le utilizăm. De exemplu: „*Împărțiți răspunsul în trei coloane și completați tabelul folosind următorii indicatori și șablon.*”
- *Identificarea erorilor.* Este periculos să copiem răspunsurile modelului fără verificări suplimentare. Putem solicita rețelei neuronale să furnizeze surse și fapte pe baza cărora a compilat răspunsul. De asemenea, poate pune întrebări clarificatoare, acestea vor ajuta utilizatorul să corecteze promptul și să obțină un rezultat mai precis.
- *Îmbunătățirea indiciilor.* Uneori, modelul refuză să răspundă. În acest caz, putem utiliza diferite tehnici pentru a ocoli limitele sale. De exemplu, ca răspuns la solicitarea „*indicați motivele educației adolescenților*”, aceasta oferă cinci puncte principale. Iar când utilizatorul solicită clarificări, acesta spune că nu există informații. Pentru a depăși această barieră, merită să discutați cu rețeaua neuronală și să o lăsați să pună întrebări clarificatoare.
- *Interacțiune.* Această categorie poate include sarcini atunci când trebuie să generăm un număr infinit de sloganuri de marketing sau materiale creative conform unei anumite reguli. Pentru a nu introduce un șablon de fiecare dată, putem spune modelului: „*Generează răspunsuri pentru mine fără oprire conform unei reguli date*”.
- *Gestionarea contextului.* Acest lucru este util atunci când trebuie să excludem anumite surse din răspuns. De exemplu, cercetăm sistemul educațional din republica Moldova și nu dorim să vedem informații despre sistemele educaționale din alte țări. Apoi, putem seta rețelei neuronale condiția: „*Pregătiți un răspuns pentru mine fără*

a include surse străine". Aceasta elimină contextul inutil - iar modelul oferă un rezultat ținând cont de datele importante pentru utilizator.

Toate cele șase tipuri de prompt-uri descrise pot fi utilizate în procesul educațional, dar eficiența și aplicabilitatea lor depind de contextul specific al educației și de obiectivele pedagogice. Mai jos, vor fi analizate fiecare tip de prompt și relevanța sa pentru educație, oferind exemple de utilizare în contextul educațional din Republica Moldova sau UE, cu accent pe aspectele legale ale inteligenței artificiale (AI).

1. *Semantica intrării*. Acest tip de prompt este util pentru a simplifica interacțiunea elevilor sau profesorilor cu modelele AI, economisind timp și reducând complexitatea sintaxei. Este ideal pentru activități repetitive sau structurate, cum ar fi învățarea prin exerciții standardizate. *Exemplu de utilizare*: Într-un curs despre legislația AI, profesorul poate seta regula: „*Când cer o comparație între legislația AI din Republica Moldova și UE, folosește doar Legea nr. 133/2011 și AI Act ca surse principale.*” Elevii pot introduce doar termeni precum „*comparație AI Moldova-UE*”, iar modelul va genera răspunsuri bazate pe sursele specificate, facilitând învățarea structurată. Ca avantaj al acestor tipuri de prompt-uri este faptul că sunt reduse barierele tehnice pentru elevi, permițându-le să se concentreze pe conținut, nu pe formularea complexă a prompt-urilor. Este util pentru cursuri introductive sau pentru elevi mai mici. Ca dezavantaj prezintă necesitatea configurării inițiale a regulilor, ceea ce poate consuma timp pentru profesori.

2. *Configurarea ieșirii informațiilor*. Acest tip de prompt este excelent pentru organizarea informațiilor într-un format clar, cum ar fi tabele, diagrame sau rapoarte, ceea ce ajută elevii să înțeleagă și să compare datele mai eficient. Este util în predarea disciplinelor care necesită o analiză structurată, cum ar fi dreptul sau științele sociale. *Exemplu de utilizare*: Într-un seminar despre protecția datelor, profesorul poate cere modelului AI: „*Prezintă obligațiile GDPR și ale Legii nr. 133/2011 într-un tabel cu trei coloane: cerințe, aplicabilitate în AI, sancțiuni.*” Elevii pot folosi acest format pentru a compara legislațiile și pentru a pregăti prezentări sau eseuri. Ca avantaj - facilitează învățarea vizuală și comparativă, fiind ideal pentru proiecte de grup sau analize detaliate. Poate fi folosit pentru a crea materiale didactice personalizate. Ca limită - necesită cunoștințe prealabile pentru a configura șabloanele corect, ceea ce poate fi o provocare pentru profesorii mai puțin familiarizați cu AI.

3. *Identificarea erorilor*. Acest tip de prompt este crucial în educație, deoarece încurajează gândirea critică și verificarea surselor, abilități esențiale pentru elevi și studenți. Este important în domeniile, unde acuratețea informațiilor este vitală. *Exemplu de utilizare*: Într-un curs despre aspectele legale ale AI, elevii pot cere modelului: „*Explică cerințele AI Act pentru sistemele cu risc ridicat și furnizează sursele exacte, inclusiv articolele relevante.*” Modelul va oferi răspunsul împreună cu referințe (ex. Regulamentul (UE) 2024/1689, Articolul 6), permițând elevilor să verifice informațiile. De asemenea,

modelul poate pune întrebări clarificatoare, cum ar fi: „*Dorești detalii doar despre sistemele cu risc ridicat sau și despre sancțiuni?*” Ca avantaj a acestui tip de prompt prezintă faptul că dezvoltă competențe de cercetare și verificare a informațiilor, esențiale în educația academică și reduce riscul de a accepta răspunsuri eronate. Ca limită - poate încetini procesul de învățare dacă elevii se bazează excesiv pe verificarea surselor în loc să aprofundeze conținutul.

4. *Îmbunătățirea indiciilor.* Acest tip de prompt este util pentru a dezvolta abilitățile de formulare a întrebărilor și pentru a încuraja elevii să gândească critic despre propriile cerințe. Este potrivit pentru cursuri care implică rezolvarea problemelor sau cercetarea independentă. *Exemplu de utilizare:* Într-un exercițiu despre etica AI, un elev cere: „*Explică motivele pentru care AI poate fi discriminatoriu.*” Dacă modelul răspunde vag, elevul poate folosi întrebări clarificatoare sugerate de model, cum ar fi: „*Te referi la bias-ul în datele de antrenament sau la utilizarea AI în recrutare?*” Acest proces ajută elevul să reformuleze promptul pentru a obține un răspuns mai detaliat. Ca avantaj - încurajează învățarea activă și dezvoltarea competențelor de comunicare cu tehnologia și este util pentru elevii care învață să cerceteze independent. Ca limită - poate fi frustrant pentru elevii care nu sunt obișnuiți să reformuleze întrebările sau să interacționeze iterativ cu AI.

5. *Interacțiune.* Acest tip de prompt este ideal pentru activități creative sau exploratorii, cum ar fi generarea de idei, scenarii sau materiale didactice. Este potrivit pentru discipline precum literatura, marketingul sau educația civică, unde creativitatea joacă un rol important. *Exemplu de utilizare:* Într-un curs despre impactul AI asupra societății, profesorul poate seta regula: „*Generează în mod continuu scenarii ipotetice despre utilizarea AI în educația din Republica Moldova, respectând Legea nr. 133/2011.*” Modelul va produce idei precum: „*Un sistem AI care personalizează lecțiile pentru elevi, respectând protecția datelor personale.*” Elevii pot analiza aceste scenarii în grup. Avantajul acestor tipuri de prompt-uri este că stimulează creativitatea și gândirea divergentă, fiind util pentru brainstorming sau proiecte interdisciplinare. Dezavantajul este că poate genera conținut redundant sau irelevant dacă regula nu este bine definită.

6. *Gestionarea contextului.* Acest tip de prompt este esențial pentru cercetarea specifică și pentru evitarea informațiilor irelevante, fiind ideal pentru proiecte focalizate pe un anumit domeniu sau regiune. Este util în educația academică, unde precizia contextului este crucială. *Exemplu de utilizare:* Într-un proiect despre reglementarea AI în Republica Moldova, elevii pot cere: „*Analizează legislația AI din Republica Moldova, excluzând referințe la alte țări.*” Modelul va furniza informații bazate doar pe Legea nr. 133/2011 și Strategia Națională de Transformare Digitală, fără a include exemple din UE sau alte jurisdicții. Avantajul acestora este că ajută la concentrarea pe conținut relevant, economisind timp și reducând confuzia. Este ideal pentru cercetarea localizată sau pentru

elevii care lucrează cu surse limitate. Dezavantajul este că poate restricționa accesul la comparații utile dacă contextul este prea strict definit.

Toate cele șase tipuri de prompt-uri sunt aplicabile în procesul educațional, dar alegerea depinde de obiectivele specifice ale lecției și de nivelul de competență al elevilor. De exemplu: *Semantica intrării* și *Configurarea ieșirii informațiilor* sunt ideale pentru activități structurate și pentru elevi începători. *Identificarea erorilor* și *Îmbunătățirea indiciilor* sunt potrivite pentru dezvoltarea gândirii critice și a cercetării independente, mai ales în ciclurile superioare (liceu, universitate). *Interacțiunea* și *Gestionarea contextului* sunt utile pentru proiecte creative sau cercetări focalizate, fiind eficiente în contexte interdisciplinare sau specifice, cum ar fi studiul legislației AI în Republica Moldova.

Principala greșeală a unui începător este să se bazeze în întregime pe răspunsul rețelei neuronale și să nu includă gândirea critică. Este important de a evalua întotdeauna răspunsurile modelului și de a filtra corect conținutul. De exemplu, să cereți să vi se ofere faptele pe care se bazează. Dacă nu sunteți expert în domeniul studiat și nu înțelegeți dacă faptele sunt bune sau nu, atunci trebuie să verificați suplimentar informațiile din alte surse. În continuare sunt expuse câteva sfaturi pentru educatorii debitanți în AI pentru a scrie corect prompt-urile.

- ✓ *Formulăm prompt-uri clare și specifice.* Definim clar obiectivul educațional și contextul, evitând ambiguitățile. De exemplu, în loc de „*Explică fotosinteza*”, folosim „*Explică procesul fotosintezei pentru elevi de clasa a VI-a, folosind un limbaj simplu și exemple din natură*”.
- ✓ *Structurăm prompt-ul logic.* Includem instrucțiuni precise, cum ar fi lungimea răspunsului, tonul sau formatul dorit (ex. listă, paragraf, tabel). De exemplu: „*Generează o listă cu trei beneficii ale energiei solare, explicând fiecare în maximum 50 de cuvinte*”.
- ✓ *Testăm și rafinăm iterativ.* Experimentăm cu variații ale prompt-ului și analizăm răspunsurile pentru a identifica formulările care produc cele mai relevante rezultate. Ajustăm prompt-ul dacă răspunsul AI nu îndeplinește așteptările.
- ✓ *Integrăm contextul educațional.* Ne asigurăm că prompt-ul reflectă nevoile elevilor și nivelul lor de înțelegere. De exemplu: „*Creează un quiz cu cinci întrebări de matematică pentru elevi de gimnaziu, axat pe fracții, cu răspunsuri și explicații*”.
- ✓ *Evităm bias-urile și promovăm etica.* Formulăm prompt-uri care încurajează răspunsuri incluzive și obiective, verificând dacă limbajul folosit este neutru și nu perpetuează stereotipuri. De exemplu: „*Describe contribuțiile diverselor culturi la dezvoltarea matematicii, fără a favoriza o regiune anume*”.

Analiza literaturii de specialitate în proiectarea prompt-urilor

În contextul expansiunii rapide a inteligenței artificiale generative, ingineria prompt-urilor (prompt engineering) a devenit o disciplină esențială pentru optimizarea interacțiunilor cu modelele de limbaj de mari dimensiuni. Acest compartiment analizează situația actuală în domeniul scrierii prompt-urilor, explorând atât fundamentele teoretice, cât și aplicațiile practice descrise în literatura de specialitate. Prin revizuirea sistematică a cercetărilor și a resurselor recente, această secțiune își propune să evidențieze tendințele, provocările și strategiile eficiente care pot ghida educatorii debutanți în utilizarea prompt-urilor pentru a maximiza performanța sistemelor AI în contexte educaționale.

În acest context, Singh S. a publicat un articol care combină teoria și practica în ingineria prompt-urilor, oferind strategii accesibile pentru educatori care doresc să optimizeze interacțiunea cu modelele AI [2]. Suharyat Y. și Lusiana L. în sursa [3] explorează beneficiile și provocările utilizării inteligenței artificiale în managementul educațional, subliniind necesitatea formării cadrelor didactice pentru utilizarea responsabilă a tehnologiilor AI, inclusiv în proiectarea prompt-urilor. Sursa [4] reprezintă un ghid detaliat care introduce conceptele de bază ale interogărilor eficiente pentru ChatGPT, oferind exemple practice și tehnici pentru educatori debutanți în utilizarea AI. Articolul din sursa [5] analizează ingineria prompt-urilor ca disciplină esențială pentru optimizarea interacțiunii cu modelele de limbaj de mari dimensiuni, oferind sfaturi practice pentru structurarea prompt-urilor clare și precise. Sursa [6] reprezintă o resursă online care detaliază tehnici avansate de inginerie a prompt-urilor, inclusiv utilizarea meta-prompt-urilor și a etichetelor XML, utilă pentru educatori interesați de personalizarea interacțiunilor cu AI. Orientările din sursa [7] oferă cadrelor didactice sfaturi practice pentru integrarea etică a AI în educație, cu accent pe crearea prompt-urilor care să minimizeze riscurile de bias și erori. O analiză a impactului AI generative în educație, cu exemple de aplicații practice pentru crearea de conținut educațional prin prompt-uri bine formulate este prezentată în sursa [8].

Revizuirea literaturii de specialitate relevă importanța crescândă a ingineriei prompt-urilor ca instrument esențial pentru optimizarea interacțiunilor cu sistemele de inteligență artificială, în special în contexte educaționale. Cercetările actuale subliniază necesitatea formulării precise și contextuale a prompt-urilor, evidențiind strategii care variază de la structurarea clară a cerințelor la integrarea principiilor etice pentru a minimiza bias-urile. Deși literatura oferă o bază solidă de principii și practici, provocările legate de adaptabilitatea prompt-urilor la diverse modele AI și de formarea educatorilor în acest domeniu rămân prioritare. Această analiză stabilește fundamentul pentru explorarea viitoare a aplicațiilor practice și a metodelor inovatoare de proiectare a prompt-urilor, esențiale pentru integrarea eficientă a inteligenței artificiale în educație.

Exemple de prompt-uri utilizate în contexte educaționale

În continuare, voi prezenta câteva scenarii educaționale extinse, structurate pe componentele cheie ale procesului educațional, cu exemple concrete de prompt-uri formulate corect. Tabelele 1-3 includ scenarii educaționale pentru procesele de învățare, predare și evaluare respectiv.

Tabelul 1. Scenarii de aplicare a prompt-urilor pentru procesul de învățare

Scenariu	Exemplu prompt
Tutor adaptiv	"Explică teorema lui Pitagora prin analogii vizuale pentru un elev de 14 ani cu dificultăți în geometrie. Include 2 probleme progresive cu soluții pas-cu-pas"
Exercițiu interactiv	"Generează un dialog în engleză de nivel A2 despre comandă la restaurant. Adaugă spații goale pentru conjugarea verbelor take și pay "
Asistent de lectură	"Rezumă capitolul 3 din Ion de Liviu Rebreanu în max. 150 de cuvinte. Identifică 3 teme principale și propune o întrebare critică"

Tabelul 2. Scenarii de aplicare a prompt-urilor pentru procesul de predare

Scenariu	Exemplu prompt
Designer de lecții	"Creează o planificare a unei lecții de 45 min. cu tema: Fotosinteza (clasa a 6-a). Include: demo experimental, video sub 3 min, activitate grupă, fișă de evaluare"
Generator materiale	"Proiectează o fișă de lucru cu 5 probleme despre ecuații de gradul I în context economie familială. Grad de dificultate: mediu"
Creator de evaluări	"Generează un test de 10 întrebări la istorie (Revoluția 1848) cu: 5 itemi de tip grilă, 3 - adevărat/fals, 2 - răspunsuri scurte. Include rubrică de corectare"

Tabelul 3. Scenarii de aplicare a prompt-urilor pentru procesul de evaluare

Scenariu	Exemplu prompt
Feedback automatizat	"Analizează acest eseu după criteriile: coerență, argumentare, gramatică. Oferă feedback constructiv cu puncte forte/îmbunătățiri (maxim 300 de cuvinte)"
Corector lingvistic	"Corectează textele acestor 5 compuneri ale elevilor (nivel cls. a 8-a): identifică greșeli de ortografie/structură și sugerează variante corecte"
Analizor de progres	"Compară aceste 3 eseuri ale aceluiași elev (luna septembrie vs decembrie). Identifică îmbunătățiri în structura argumentării și vocabular"

În tabelul 4 sunt incluse modele de prompt-uri pentru alte scenarii integrate din procesul educațional așa ca proiectele interdisciplinare și evaluarea diferențiată a elevilor.

Tabelul 4. Scenarii integrate de aplicare a prompt-urilor

Scenariu integrat	Exemplu prompt
Proiect interdisciplinar	"Creează un proiect științe-istorie (nivel liceu): Impactul Revoluției Industriale pe mediu. Include: cerințe pentru elev, resurse, rubrică evaluare, durată 2 săptămâni"
Diferențiere învățare	"Generează 3 versiuni ale aceleiași lecții de biologie (celula): a) pentru elevi vizuali b) pentru elevii cu CES c) nivel avansat. Fiecare versiune max. 1 pagină"

Concluzii și recomandări

Analiza realizată în cadrul acestui articol subliniază rolul critic al ingineriei prompt-urilor în maximizarea eficienței interacțiunilor cu sistemele de inteligență artificială (AI) în contexte educaționale. Secțiunea introductivă a evidențiat necesitatea unei abordări structurate pentru a sprijini educatorii în adoptarea tehnologiilor AI. Compartimentul dedicat tipurilor de prompt-uri a clasificat principalele categorii – descriptive, instructoare și exploratorii – oferind o înțelegere clară a modului în care fiecare tip poate fi utilizat pentru a atinge obiective educaționale specifice. Analiza literaturii de specialitate a scos în evidență tendințele actuale și provocările în proiectarea prompt-urilor, subliniind importanța preciziei, contextului și considerațiilor etice pentru a evita bias-urile și a asigura rezultate relevante. În final, exemplele practice de prompt-uri utilizate în contexte educaționale au ilustrat aplicabilitatea directă a acestor principii, demonstrând cum formulările bine construite pot facilita învățarea personalizată, generarea de conținut educațional și evaluarea elevilor. În urma analizei situației în domeniu venim și cu unele recomandări:

- *Dezvoltarea competențelor în ingineria prompt-urilor.* Educatorii debutanți ar trebui să participe la programe de formare dedicate, care să includă ateliere practice pentru proiectarea și testarea prompt-urilor, pentru a înțelege mai bine impactul formulării asupra răspunsurilor generate de AI.
- *Adoptarea unei abordări iterative.* Se recomandă testarea și rafinarea continuă a prompt-urilor, utilizând feedback-ul obținut din interacțiunile cu sistemele AI pentru a optimiza claritatea și relevanța rezultatelor.
- *Integrarea principiilor etice.* Educatorii trebuie să prioritizeze formularea prompt-urilor care promovează incluziunea și reduc riscul de bias, asigurându-se că interacțiunile cu AI respectă standardele etice în educație.
- *Utilizarea diverselor tipuri de prompt-uri.* În funcție de obiectivele educaționale, educatorii ar trebui să experimenteze cu combinații de prompt-uri descriptive, instructoare și exploratorii pentru a sprijini învățarea activă și creativitatea elevilor.
- *Colaborarea interdisciplinară.* Se încurajează colaborarea cu experți în AI și alți educatori pentru a dezvolta baze de date cu prompt-uri eficiente, care să poată fi partajate și adaptate în diverse contexte educaționale.
- *Monitorizarea evoluției tehnologiei AI.* Având în vedere ritmul rapid al inovațiilor în domeniul AI, educatorii ar trebui să se mențină la curent cu noile dezvoltări în ingineria prompt-urilor prin accesarea resurselor actualizate, cum ar fi cele oferite de platforme precum <https://x.ai/grok>.

Aceste recomandări oferă un cadru practic pentru integrarea ingineriei prompt-urilor în practica educațională, contribuind la formarea unor medii de învățare inovatoare și eficiente, susținute de tehnologiile AI.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024.

Bibliografie

1. A Prompt Pattern Catalog to Enhance Prompt Engineering with ChatGPT. Accesibil la: <https://arxiv.org/abs/2302.11382> accesat la 15.07.2025
2. SINGH, S. *The Art and Science of Prompt Engineering: Techniques for Maximizing LLM Performance*. C# Corner. 2025. Accesibil la: <https://t.co/uYSJLbYDYE> [accesat la 16.07.2025].
3. SUHARYAT, Y., LUSIANA, L. The Role of Artificial Intelligence in Educational Management: Opportunities and Challenges. În: *EDICT Journal of Education*, 2023. 17(3), pp. 45-60.
4. Tribuna Învățământului. ChatGPT: Secrete pentru începători. În: *Tribuna Învățământului*, 2024. nr. 47-48, pp. 12-15.
5. Today Software Magazine. Strategii pentru o inginerie eficientă a prompturilor. În: *Today Software Magazine*, 2025. vol. 32(1), pp. 22-30.
6. Anthropic. Prompt Engineering Overview. 2025. Accesibil la: <https://www.anthropic.com/prompt-engineering-guide> [accesat la 16.07.2025].
7. European Commission. Ethical Guidelines on the Use of Artificial Intelligence and Data in Teaching and Learning for Educators. Learning Corner. 2024. Accesibil la: <https://learning-corner.learning.europa.eu> [accesat la 16.07.2025].
8. Educația Digitală. Inteligența artificială în educație: Transformări și provocări. Educația Digitală, 2025. Accesibil la: <https://educatia-digitala.ro> [accesat la 16.07.2025].

UDC: 37.016:004+311

ROLUL GÂNDIRII COMPUTAȚIONALE ȘI AL GÂNDIRII STATISTICE ÎN MODERNIZAREA CURRICULUMULUI LA INFORMATICĂ

Tatiana VEVERIȚA, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-0798-0174>

e-mail: veverita.tatiana@upsc.md

Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. Articolul examinează integrarea Gândirii Computaționale și a Gândirii Statistice în curriculumul modern la informatică, evidențiind rolul lor transdisciplinar în alfabetizarea digitală și dezvoltarea competențelor cognitive, etice și creative. Sunt analizate procesele fundamentale ale GC – gândirea algoritmică, modelarea computațională și învățarea automată și complementaritatea acestora cu gândirea statistică pentru analiza datelor și luarea deciziilor bazate pe dovezi. Articolul propune recomandări pentru implementarea curriculumului la toate nivelurile de învățământ, inclusiv module dedicate AI și Big Data, resurse digitale deschise, învățare prin proiecte, subliniind importanța echilibrului între competențele tehnice și cele umaniste.

Cuvinte-cheie: Gândire computațională, gândire statistică, curriculum, gândire algoritmică, Inteligență artificială, BigData, Internetului Lucrurilor.

THE ROLE OF COMPUTATIONAL THINKING AND STATISTICAL THINKING IN MODERNIZING THE COMPUTER SCIENCE CURRICULUM

Abstract: The article examines the integration of Computational Thinking and Statistical Thinking into the modern computer science curriculum, highlighting their transdisciplinary role in digital literacy and the development of cognitive, ethical, and creative skills. It analyzes the fundamental processes of Computational Thinking – algorithmic thinking, computational modeling, and machine learning and their complementarity with Statistical Thinking for data analysis and evidence-based decision making. The article proposes recommendations for implementing the curriculum across all educational levels, including dedicated AI and Big Data modules, open digital resources, project-based learning, emphasizing the importance of balancing technical and humanistic competencies.

Keywords: Computational Thinking, Statistical Thinking, Curriculum, Algorithmic Thinking, Artificial Intelligence, Big Data, Internet of Things

I. Premise pentru adoptarea unei noi paradigme curriculare

Ultima revoluție industrială, marcată de apariția inteligenței artificiale, a Big Data și a Internetului Lucrurilor (IoT), determină schimbări sociale și economice profunde. Aceste transformări solicită școlii nu doar formarea unor competențe tehnice precum programarea sau matematica, ci și cultivarea unor abilități cognitive și umaniste, precum gândirea critică, etica și creativitatea.

În acest context, în reforma curriculară devin fundamentale două direcții:

1. Gândirea computațională (GC) – ca metodă de rezolvare sistematică a problemelor prin algoritmi, abstractizare și modelare.

2. Gândirea statistică – ca fundament pentru înțelegerea datelor, a incertitudinii și a deciziilor bazate pe dovezi.

Cooperarea Economică Asia-Pacific (APEC), prin proiecte precum „Matematică incluzivă pentru sustenabilitate într-o economie digitală” (InMside), dar și organizații internaționale de prestigiu precum Organizația Națiunilor Unite pentru Educație, Știință și Cultură (UNESCO) și Organizația pentru Cooperare și Dezvoltare Economică (OECD), contribuie activ la promovarea politicilor educaționale inovatoare, la schimbul de bune practici și la sprijinirea statelor membre în adaptarea sistemelor de învățământ la cerințele societății cunoașterii și ale economiei digitale [1-2].

II. Tranziția de la competențele secolului XXI la competențele specifice erei digitale

La începutul secolului XXI, globalizarea și dezvoltarea rețelelor internaționale prin Internet au transformat economia mondială, făcând societatea mai competitivă și mai provocatoare. În acest context, OECD [3] a propus competențele necesare pentru o viață de succes și o societate funcțională.

În prezent, toate economiile implementează curriculumuri orientate spre dezvoltarea competențelor secolului XXI. La evenimentul internațional organizat sub egida rețelei *Human Resources Development Working Group – Education Network (HRD-EdNet)*, parte a cooperării economice Asia-Pacific (APEC) din Chile [4], dr. Habibah Binti Abdul Rahim (Malaezia) a prezentat un cadru curricular inovator, în care competențele necesare pentru educația în era digitală au fost structurate în trei categorii: *competențe cognitive*, *competențe soft* și *competențe hard*.

Acest model se corelează cu alte cadre curriculare, precum cel al Japoniei adoptat în 2017, care are trei piloni [5]:

- ✓ *Hard skills* - dobândirea cunoștințelor și abilităților.
- ✓ *Cognitive skills* - dezvoltarea gândirii, judecății și exprimării.
- ✓ *Soft skills* - formarea motivației pentru învățare și a trăsăturilor umane.

Aceste principii se regăsesc și în standardele educaționale din Asia de Sud-Est pentru matematică și științe (SEA-BES, 2017), unde accentul cade pe formarea caracterului și pe gândirea de nivel înalt (conform Taxonomiei Bloom) [6].

Aceste cadre curriculare generale răspund recomandărilor OECD, dar au fost dezvoltate și ca reacție la provocările celei de-a patra revoluții industriale, marcate de inteligența artificială și Big Data.

În anul 2010, educația a fost influențată de două mișcări majore:

- ✓ *Internet of Things (IoT)* – care a dus la trecerea de la educația STEM la educația STEAM, punând accent și pe artă și creativitate.
- ✓ *A patra revoluție industrială*, marcată de AI și Big Data.

UNESCO, în 2019, prin Beijing Consensus, a recomandat guvernelor să integreze AI în politici educaționale, să sprijine noi modele de învățare personalizată, să folosească date relevante pentru politici bazate pe dovezi, să pregătească forța de muncă pentru era AI și să promoveze utilizarea echitabilă și etică a tehnologiilor [7].

Proiectul APEC „Inclusive Mathematics for Sustainability in a Digital Economy” (InMside) a subliniat că reforma curriculară trebuie să vizeze umanitatea și gândirea critică, nu doar programarea. Astfel, sunt necesare atât competențe de programare și matematică (hard skills), cât și cele de judecată, valori, caracter (soft și cognitive skills).

În 2018, cercetătorul Isoda [8] a propus trei tipuri de competențe umanist-sociale:

- ✓ *de a conduce* - capacitatea de a crea valori noi pentru societatea 5.0.
- ✓ *de a lucra* - capacitatea de a anticipa viitorul și de a folosi AI și roboții în mod responsabil pentru o societate funcțională.
- ✓ *de a trăi* - capacitatea de a trăi în scop personal și umanist în societatea digitală.

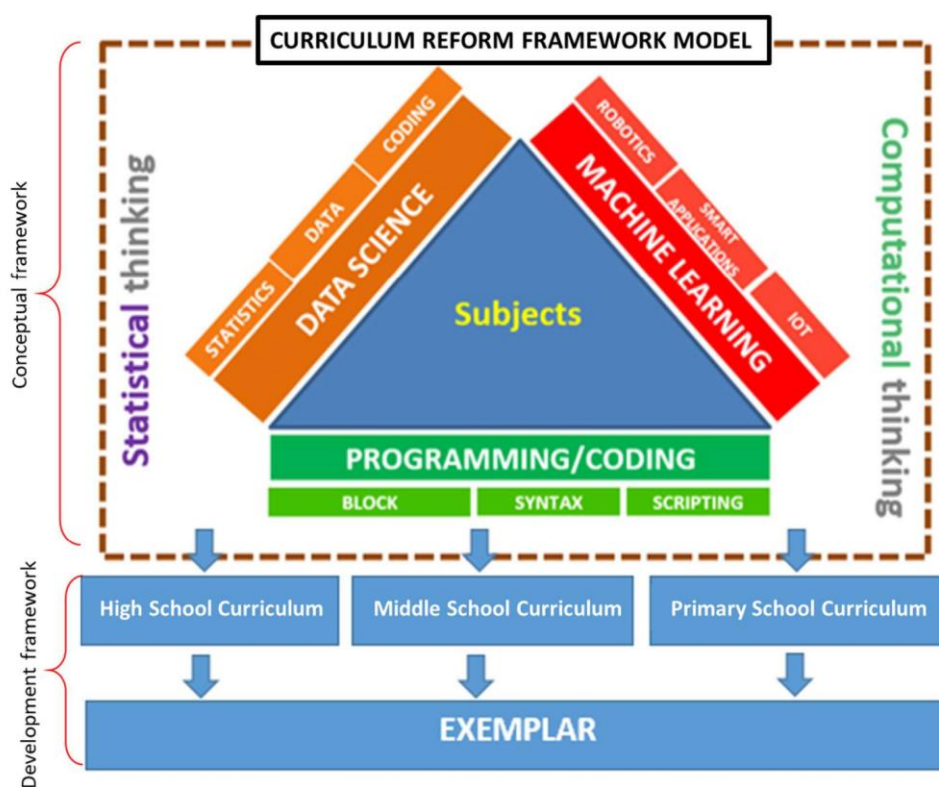


Figura 1. Curriculum Framework for Era of AI and Big Data on InMside

Ministerul Economiei din Japonia în 2019 a subliniat rolul matematicii și informaticii ca fundament al „capitalismului matematic”, necesare pentru inovație și dezvoltare economică. Documente internaționale din Marea Britanie, Australia și Franța confirmă importanța științelor matematice pentru analiză de date, modelare și simulare.

Potrivit Ministerului Economiei, Comerțului și Industriei (METI) din Japonia [9], dezvoltarea capitalului uman de vârf necesită o educație matematică avansată și competențe în informatică, esențiale pentru economia digitală și utilizarea AI și Big Data.

Această abordare este susținută și de documente internaționale, precum Era Matematicii și studiul Australian Academy of Science privind importanța științelor fizice și matematice pentru economie [10].

Cercetătorul Lew [11] a analizat AI din mai multe perspective:

- ✓ *umanistă* – AI ca patrimoniu al umanității;
- ✓ *viața cotidiană* – AI integrată în activitățile zilnice;
- ✓ *dezvoltare personală* – AI ca instrument de învățare și rezolvare a problemelor;
- ✓ *dezvoltare socială* – AI schimbă societatea și viitoarele locuri de muncă.

Astfel, gândirea computațională și gândirea statistică se întâlnesc la punctul comun al acestor competențe, furnizând atât instrumente logice și tehnice, cât și fundamente pentru luarea deciziilor responsabile și informate într-o societate tot mai orientată către date (fig. 1).

III. Gândirea computațională și gândirea statistică – competențe transdisciplinare pentru alfabetizarea digitală

Organizații internaționale precum UNESCO recunosc *gândirea computațională* drept o competență esențială pentru cetățenii societății digitale. Aceasta ne învață să rezolvăm probleme prin utilizarea inteligentă a calculatoarelor și a tehnologiilor moderne, indiferent dacă explorăm universul matematicii, complexitatea biologiei, subtilitățile științelor sociale sau frumusețea limbajului.

Gândirea computațională (GC) are rădăcini istorice ce se întind de la conceptele filosofice ale lui Leibniz și Ramon Lull, până la dezvoltarea mașinii universale a lui Turing [4]. În prezent, GC este definită, conform Jeannette Wing [12], ca *procesul de formulare a problemelor și exprimare a soluțiilor într-o manieră care permite executarea acestora de un calculator, fie el uman sau mecanic*, subliniind astfel rolul său transdisciplinar în educația contemporană.

Conform definiției lui Brennan și Resnick [13], GC reprezintă *un ansamblu de competențe cognitive ce cuprind decompoziția problemelor, identificarea tiparelor, abstracția și construcția algoritmilor*. Aceste elemente funcționează împreună într-un proces sistematic de rezolvare a problemelor, oferind un cadru metodic pentru abordarea provocărilor complexe.

Astfel, elementele cheie ale GC includ *decompoziția, recunoașterea tiparelor, algoritmizarea și abstracția*, iar procesul implică și *reprezentarea datelor, preprocesarea, modelarea, simularea și automatizarea soluțiilor*. Prin practicarea sistematică și repetitivă a acestor abilități, elevii dezvoltă competențe fundamentale în rezolvarea problemelor complexe, caracterizate prin eficiență și creativitate. Aceasta poziționează gândirea computațională drept o competență transdisciplinară esențială pentru educația contemporană și pentru funcționarea optimă în cadrul societății digitale.

GC nu se limitează la dimensiunea sa tehnică, ci implică interconexiuni cu domenii precum epistemologia, etica și înțelepciunea practică. Formarea elevilor în acest sens presupune conștientizarea unor aspecte importante precum:

- ✓ responsabilitatea morală și dilemele etice (ex.: situații critice în cazul mașinilor autonome);
- ✓ riscul prejudecăților algoritmice (de gen, etnice etc.);
- ✓ rolul tehnologiei în construirea unei societăți sustenabile și echitabile.

Astfel, putem afirma că gândirea computațională depășește limitele programării, constituind un mod de gândire integrat ce unește analiza, creativitatea, dimensiunea etică și responsabilitatea în utilizarea tehnologiei. În așa mod ea devine o condiție esențială pentru formarea noilor generații, pregătite să se adapteze și să inoveze într-o societate digitală marcată de complexitate și imprevizibilitate.

Literatura de specialitate identifică trei procese fundamentale ale gândirii computaționale [14] pe care elevii trebuie să le dezvolte:

- ✓ *gândirea algoritmică*, denumită și *gândire computațională tradițională* [15];
- ✓ *modelarea computațională*;
- ✓ *gândirea bazată pe învățarea automată* (machine learning).

Aceste procese, deși nu sunt suficiente în sine, constituie condiții indispensabile pentru formarea elevilor ca viitori cetățeni activi și responsabili într-o societate digitală complexă.

Gândirea algoritmică se manifestă atunci când individul identifică modele repetate în probleme și elaborează un set de reguli generalizate pentru rezolvarea acestora, evitând astfel necesitatea de a regândi procesul de fiecare dată. În esență, ea presupune construirea unui algoritm sau a unei proceduri raționale. Această formă de gândire este frecvent utilizată atât în rezolvarea problemelor, cât și în programarea pe calculator, reprezentând dimensiunea cea mai vizibilă și ușor de recunoscut a gândirii computaționale.

Modelarea computațională reprezintă o formulare matematică a unui fenomen sau sistem, care este implementată și analizată prin intermediul metodei computaționale. Această formă de gândire permite elevilor să înțeleagă și să prevadă comportamente complexe, să testeze scenarii și să dezvolte soluții bazate pe reguli și algoritmi, contribuind astfel la dezvoltarea competențelor de analiză și raționament logic.

Învățarea automată reprezintă o ramură a inteligenței artificiale prin care algoritmi învață să îndeplinească sarcini fără a fi programați explicit, identificând tipare în date și efectuând deducții. Potrivit lui Jordan [16], învățarea automată integrează concepte din statistică, informatică și alte discipline pentru a proiecta algoritmi capabili să proceseze date, să realizeze predicții și să sprijine luarea deciziilor. În acest context, învățarea automată este o componentă esențială a științei datelor, impunând competențe integrate în

matematică și statistică, programare și cunoștințe de domeniu pentru formularea modelelor, implementarea algoritmilor și interpretarea corectă a rezultatelor.

Gândirea computațională dezvoltă abilitatea de a identifica tipare și a construi algoritmi pentru rezolvarea problemelor, oferind baza pentru inteligența artificială, care combină GC cu modele computaționale și machine learning pentru ca sistemele să ia decizii inteligente și să proceseze date complexe.

Gândirea statistică completează competențele dezvoltate prin gândirea computațională, oferind elevilor instrumentele necesare pentru înțelegerea variabilității și imprevizibilității, colectarea și prelucrarea responsabilă a datelor, interpretarea critică a vizualizărilor și a concluziilor, precum și aplicarea analizei statistice în contexte reale, de la sănătate și economie până la mediu. Prin integrarea acestor abilități, elevii dobândesc un cadru transdisciplinar, în care analiza datelor și construirea algoritmilor se completează reciproc, facilitând luarea deciziilor bazate pe cunoștințe și dovezi într-o societate digitală tot mai complexă. Reforma curriculară trebuie să reflecte această interconexiune, combinând gândirea computațională și gândirea statistică cu dimensiunea etică și umanistă, astfel încât elevii să fie pregătiți nu doar să programeze, ci și să înțeleagă impactul inteligenței artificiale și al Big Data asupra vieții și societății.

IV. Integrarea gândirii computaționale și gândirii statistice în curriculumul modern

Tin Lam [17] a abordat problema dacă gândirea computațională ar trebui predată ca disciplină de sine stătătoare sau integrată în discipline existente, în timp ce Ulap [18] a subliniat că scopul curriculumului K–12 (destinat elevilor din clasele K (Kindergarten – nivel preșcolar) până la clasa a 12-a) la matematică era dezvoltarea competențelor de rezolvare a problemelor și a gândirii critice. Pentru a realiza aceste obiective, a fost necesară elaborarea unui *Cadru de Reformă Curriculară* care să ghideze procesul de dezvoltare, proiectare și implementare a curriculumului la nivel primar, gimnazial și liceal în economiile membre APEC.

În acest context, „Cadrul general pentru gândirea computațională și gândirea statistică” propus în proiectul InMside [4] reprezintă un răspuns strategic, deoarece evidențiază necesitatea integrării gândirii computaționale și a gândirii statistice ca piloni fundamentali ai educației în era digitală. Această abordare unificată răspunde provocărilor actuale generate de complexitatea problemelor sociale, științifice și tehnologice, oferind elevilor și studenților competențe care depășesc limitele unei singure discipline.

Astfel, gândirea computațională asigură instrumentele de modelare și automatizare a proceselor, în timp ce gândirea statistică permite interpretarea critică și fundamentată a datelor. Împreună, ele construiesc un cadru transdisciplinar ce îmbină analiza, creativitatea și luarea deciziilor bazate pe date, sprijinind formarea unor cetățeni și profesioniști capabili să contribuie activ la dezvoltarea sustenabilă a societății digitale.

Acest cadru a oferit baza metodologică necesară pentru integrarea coerentă a gândirii computaționale și a gândirii statistice în curriculumul modern (fig. 1), *facilitând dezvoltarea competențelor digitale și statistice esențiale pentru alfabetizarea digitală și pentru pregătirea elevilor la toate nivelurile de învățământ, de la primar până la liceu*, în fața provocărilor societății bazate pe date.

Un curriculum modern trebuie să fie **transdisciplinar** și să combine:

- ✓ **Gândirea computațională** pentru modelarea și rezolvarea problemelor;
- ✓ **Gândirea statistică** pentru interpretarea datelor;
- ✓ **Etica și umanitatea** pentru orientarea deciziilor tehnologice.

Concluzii și recomandări

Curriculumul modern la Informatică trebuie să se raporteze la realitățile educaționale și economice ale erei AI și Big Data, punând accent pe competențe transferabile și transdisciplinare. Gândirea computațională și gândirea statistică nu sunt doar instrumente tehnice, ci modalități de structurare a raționamentului și de înțelegere critică a informației. Astfel, ele devin esențiale pentru formarea unei culturi digitale care să asigure echilibrul între progres tehnologic și responsabilitate socială.

Curriculumul trebuie să fie compatibil cu tendințele globale (UNESCO, OECD, APEC) și să urmărească *alfabetizarea digitală* ca o competență de bază a cetățeanului secolului XXI. În acest sens, se recomandă:

- *Introducerea în curriculum a unor module dedicate Inteligenței Artificiale, Big Data și securității cibernetice*, adaptate nivelului cognitiv al elevilor, pentru a le oferi competențe relevante în raport cu transformările pieței muncii și cu provocările societății digitale.
- *Promovarea învățării prin proiecte și abordare interdisciplinară*, care să stimuleze creativitatea, colaborarea și aplicabilitatea practică a conceptelor informatice în contexte reale.
- *Crearea unor resurse educaționale digitale deschise* (manuale interactive, simulări, platforme de programare vizuală), accesibile tuturor elevilor și profesorilor, pentru a sprijini echitatea și incluziunea digitală.
- *Implementarea unor metode de evaluare autentică* (portofolii digitale, proiecte colaborative, simulări), care să reflecte competențele dobândite și să valorifice procesul de învățare, nu doar memorarea cunoștințelor teoretice.
- *Dezvoltarea unor programe naționale de formare pentru profesori* în domeniile emergente ale informaticii și pedagogiei digitale, pentru a consolida rolul cadrelor didactice ca facilitatori ai învățării inovatoare.
- *Asigurarea unui echilibru între competențele tehnice și cele umaniste*: pe lângă programare, modelare și analiză a datelor, accentul trebuie pus pe etică, gândire

critică și responsabilitate socială, astfel încât absolvenții să devină nu doar utilizatori avansați de tehnologie, ci și cetățeni responsabili ai societății digitale.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024

Bibliografie

1. APEC. *The Action Plan of the APEC Education Strategy*. Asia-Pacific Economic Cooperation, 2018. <https://www.apec.org/docs/default-source/groups/hrd/2018/action-plan-of-apec-education-strategy-final.pdf>
2. OECD. *OECD Future of Education and Skills 2030*. Organisation for Economic Co-operation and Development, 2019. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/reports/2018/06/the-future-of-education-and-skills_5424dd26/54ac7020-en.pdf
3. UNESCO. *Rethinking Education: Towards a Global Common Good?* United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 2015. https://www.researchgate.net/publication/321289639_Rethinking_Education_Towards_a_Global_Common_Good
4. ISODA, M., ARAYA, R., INPRASITHA, M. Developing Computational Thinking on AI and Big Data Era for Digital Society. APEC Human Resources Development Working Group, 2021. 57 p. [https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/221_hrd_developing-computational-thinking-on-ai-and-big-data-era\(6\).pdf](https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/221_hrd_developing-computational-thinking-on-ai-and-big-data-era(6).pdf)
5. KANO, T. *Information Education on Newest Japanese Curriculum Standards*, APEC, 2019. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2019/presentations/7Feb/2/rev2-Toshiharu_Kano20190207.pdf
6. MANGAO, D. D., AHMAD, N. J., ISODA, M. (Eds.). *SEAMEO Basic Education Standards (SEA-BES): Common Core Regional Learning Standards (CCRLS) in Mathematics and Science*. SEAMEO RECSAM, 2017. 190 p. ISBN: 978-967-930-039-0. http://www.recsam.edu.my/sub_SEA-BES/images/docs/CCRLSReport.pdf
7. RAMO, J. C. *The Beijing Consensus*. Foreign Policy Centre, 2004. ISBN 1903558352. 79 p. <https://fpc.org.uk/publications/the-beijing-consensus/>
8. ISODA, M. *International collaborative research to develop standards for education curriculum for developing computational thinking in an AI society*. 2018. <https://kaken.nii.ac.jp/ja/file/KAKENHI-PROJECT-19K21743/19K21743seika.pdf>
9. METI. Ministry of Economy, Trade and Industry. <https://www.meti.go.jp/english/>

10. EU-MATHS-IN. *The Era of Mathematics: An Independent Review of Knowledge Exchange in the Mathematical Sciences*. 2018. <https://eu-maths-in.eu/wp-content/uploads/EraOfMathematicsReport.pdf>
11. LEW, H. C. *AI for Education in Kporea: Cases of KNUE*. Korea National University of Education, 2019. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2020/presentations/11Feb/07-Hee-chan_L-2020.pdf
12. WING, J. M. *Computational thinking*. In: *Commun. ACM*, 2006. 49, pp. 33–35. <https://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf>
13. VEVERIȚA, T. Impactul utilizării mediilor de programare vizuală în dezvoltarea gândirii computaționale și a competențelor transdisciplinare în învățământul gimnazial. În: *Acta et Commentationes, Sciences of Education*, 2025. nr. 2(40), pp. 83-98. https://revistaust.upsc.md/index.php/acta_educatie/article/view/1119/1094
14. ARAYA, R., ISODA, M., GONZÁLEZ, O. INPRASITHA, M. *Discussion Paper. A Framework for Computational Thinking for the Transition to a Super Smart Society*. APEC Project, 2019. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/seameo/2019/presentations/2/Roberto_Araya-Masami_Isoda20190210e.pdf
15. SANTILLAN, M. Computational Thinking in Junior High School. În: *APEC-Tsukuba International Conference XIV*, University of Tsukuba, Tokyo, Japan 2020. Downloaded from http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2020/presentations/11Feb/09-Marcela_S2020.pdf
16. JORDAN, M. Artificial Intelligence—The Revolution Hasn’t Happened Yet. In: *Harvard Data Science Review*, 2019. 11. https://www.researchgate.net/publication/334165961_Artificial_Intelligence-The_Revolution_Hasn't_Happened_Yet
17. TIN LAM, T. Computational Thinking. În: *APEC-Tsukuba International Conference XIV*, University of Tsukuba, Tokyo, Japan 2020. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2020/presentations/11Feb/06-Toh_TL-2020.pdf
18. ULEP, S. Computational Thinking in Junior High School. În: *APEC-Tsukuba International Conference XIV*, University of Tsukuba, Tokyo, Japan 2020. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2020/presentations/12Feb/17-Soledad_A.U-2020.pdf

UDC: 512.13:511.174

UTILIZAREA PROPRIETĂȚILOR FUNCȚIILOR CONVEXE/CONCAVE LA DEMONSTRAREA INEGALITĂȚILOR

Carina Maria VIESPESCU, elevă

Liceul Internațional de Informatică ICHB, București, România

Sebastian Petrișor ILINCA, profesor școlar

e-mail: ilincasebastian@yahoo.com

Școala Gimnazială Pîrșcoveni, Olt, România

Rezumat. În lucrare se vor prezenta diverse metode pentru demonstrarea inegalităților, utilizând proprietățile funcțiilor convexe sau concave.

Cuvinte cheie: funcție convexă, funcție concavă, inegalitate.

USING THE PROPERTIES OF CONVEX/CONCAVE FUNCTIONS FOR PROVING INEQUALITIES

Abstract. The paper will present various methods for proving inequalities, using the properties of convex or concave functions.

Keywords: convex function, concave function, inequality.

Introducere

Funcțiile convexe joacă un rol important în multe domenii din matematică, de exemplu în probleme de optimizare, în rezolvarea inecuațiilor și în rezolvarea anumitor ecuații. Vom prezenta diverse metode de demonstrare a inegalităților, utilizând proprietățile funcțiilor convexe/concave.

Câteva noțiuni de bază

Definiție: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este *convexă* dacă $\forall x, y \in I, \lambda \in [0, 1]$ avem $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Dacă inegalitatea este strictă ($x \neq y, \lambda \in (0, 1)$), atunci funcția este strict convexă.

Funcția este *concavă* (strict concavă) dacă $-f$ este convexă.

Funcțiile simultan convexe și concave sunt cele afine.

Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă un criteriu util de stabilire al convexității funcției este derivata a doua a funcției. Mai exact dacă $f'' \geq 0$ pe I atunci f este convexă pe I și evident dacă $f'' \leq 0$ pe I atunci f este concavă pe I .

Exemple:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ este strict convexă
- $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln x$ este strict concavă
- funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ este strict concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, +\infty)$

d) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ este convexă. Într-adevăr funcția f , este de două ori derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $f''(x) = e^x(x+2) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

e) funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{x^2+1}$ este concavă și $g''(x) = -\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$

f) fie $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \ln x$, $h''(x) = 2 \ln x + 3$. Din tabelul de semn rezultă că derivata a doua nu are semn constant pe $(0, +\infty)$.

Așadar, funcția este concavă pe $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ și convexă pe intervalul $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. Pe intervalul

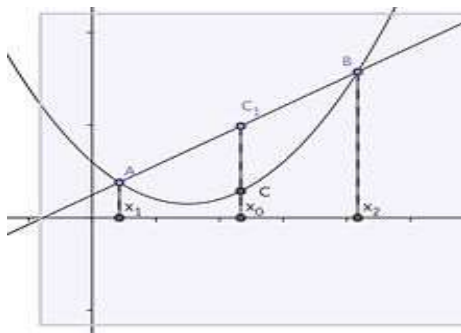
de definiție h nu este nici concavă nici convexă.

Dacă f este strict convexă atunci neapărat derivata a doua a funcției este pozitivă așa cum arată exemplul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, f este strict convexă fără ca derivata a doua să fie pozitivă.

Luând $\lambda = \frac{1}{2}$ în definiția convexității obținem o inegalitate utilă: dacă f este o funcție

convexă pe un interval I atunci $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Funcțiile convexe au proprietatea că

punctele oricărei porțiuni de pe grafic se află sub punctele corespunzătoare coardei sau pe coardă. În cazul funcțiilor concave punctele oricărei porțiuni de pe grafic se află deasupra punctelor corespunzătoare coardei sau pe coardă.



Teoremă: Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci:

- i) f este convexă dacă și numai dacă $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$, $\forall x, a \in I$
- ii) f este strict convexă dacă și numai dacă $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$, $\forall x, a \in I$, $x \neq a$

Demonstrație:

i) Necesitatea: presupunem că funcția f este convexă. Fie $x, a \in I$, $x \neq a$, $\lambda \in [0, 1]$. Atunci:

$$f(a + \lambda(x-a)) = f((1-\lambda)a + \lambda x) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(x) = f(a) + \lambda(f(x) - f(a))$$

de unde avem: $\frac{f(a + \lambda(x-a)) - f(a)}{\lambda(x-a)} \leq f(x) - f(a)$

Demonstrația se încheie trecând la limită după $\lambda \rightarrow 0$.

Suficiența: Fie $x, y \in I$, $\lambda \in [0, 1]$

Conform ipotezei: $f(x) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y) + f'((1-\lambda)x + \lambda y) \cdot (x-y) \cdot \lambda$

$$f(y) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y) + f'((1-\lambda)x + \lambda y) \cdot (1-\lambda) \cdot (x-y)$$

Înmulțind prima relație cu $1-\lambda$ și cea de a doua cu λ obținem:

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y), \text{ ceea ce ne arată că funcția } f \text{ este convexă.}$$

ii) Necesitatea:

Procedăm ca la punctul i) și obținem $\frac{f(a + \lambda(x-a)) + f(a)}{\lambda} < f(x) - f(a)$

$$f(a + \lambda(x-a)) - f(a) \geq f'(a) + \lambda(x-a)$$

prin urmare, $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a), \forall x, a \in I, x \neq a$

Suficiența se demonstrează asemănător ca la punctul i).■

Remarcăm faptul că o funcție convexă poate să nu fie continuă și dacă este continuă poate să nu fie derivabilă. Ca exemple avem funcțiile $f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \text{ sau } x=1 \\ 0, & x \in (0,1) \end{cases}$ și funcția modul.

Funcțiile convexe sunt însă continue în toate punctele interioare ale intervalului de definiție și în aceste puncte au derivate laterale finite. Mulțimea punctelor de nederivabilitate ale unei funcții convexe este cel mult numărabilă.

Propoziția 1: Fie $f: I \rightarrow R$ o funcție convexă. Pentru orice $x < y < z$ din I are loc

$$\text{relația: } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Demonstrație: Considerăm y ca o combinație convexă de x și z , adică $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ cu $\lambda \in (0, 1)$. Relația de demonstrat se reduce la definiția proprietății de convexitate.■

Lemă: Fie $f: I \rightarrow R$ și $I \subset R$ un interval. Atunci funcția f este convexă dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0, \forall x, y, z \in I \text{ distincte. Sau echivalent } \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0, \forall x, y, z \in I, x < y < z.$$

Demonstrație: Condiția $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0, \forall x, y, z \in I, x < y < z$ este echivalentă cu:

$$(z-y)f(x) - (z-x)f(y) + (y-x)f(z) \geq 0, \forall x < y < z$$

Putem scrie pe y ca o combinație convexă de x și z : $y = (1-\lambda)x + \lambda z, \forall \lambda \in [0, 1]$

f fiind convexă rezultă că $f((1-\lambda)x + \lambda z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$. ■

Funcției $f : I \rightarrow R$ îi asociem o nouă funcție $s_a : I \setminus \{a\} \rightarrow R$, $s_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $a \in I$.

Teoremă (Galvani): Fie f o funcție reală definită pe un interval I . Atunci f este convexă (respectiv strict convexă) dacă și numai dacă funcția asociată

$s_a : I \setminus \{a\} \rightarrow R$, $s_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $a \in I$ este crescătoare (respectiv strict crescătoare).

$$\text{Adică, } \frac{s_a(y) - s_a(x)}{y - x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & a & f(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}} \geq 0, \forall x, y, a \in I.$$

Demonstrație teoremei rezultă din lema anterioară.

Funcțiile convexe constituie o clasă importantă de funcții ce oferă numeroase inegalități. Vom prezenta în continuare câteva proprietăți de bază ale funcțiilor convexe și concave utile în multe aplicații.

Propoziția 2:

- suma a două funcții convexe (concave) este o funcție convexă (concavă)
- produsul dintre o funcție convexă și o funcție constantă pozitivă este o funcție convexă.
- Dacă $g : I \rightarrow J$, $f : J \rightarrow R$, $I, J \subseteq R$, g convexă și f convexă și **crescătoare** atunci $f \circ g$ este convexă
- Dacă g este inversa lui f atunci au loc următoarele afirmații:
 - f convexă și crescătoare $\Rightarrow g$ concavă și crescătoare
 - f convexă, descrescătoare $\Rightarrow g$ convexă descrescătoare
 - f concavă, descrescătoare $\Rightarrow g$ concavă descrescătoare

Demonstrație:

a) Fie $g : I \rightarrow R$, $f : I \rightarrow R$ două funcții convexe (se demonstrează analog pentru cele concave). Dacă $x_1, x_2 \in I$, $\lambda \in [0, 1]$ din definiția convexității avem:

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &\leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &\leq (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2) \end{aligned}$$

prin adunarea celor două inegalități obținem:

$$(f + g)((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)(f + g)(x_1) + \lambda(f + g)(x_2)$$

b) fie $f : J \rightarrow R$, $I \subseteq R$, $g : I \rightarrow R$, $g(x) = c$, $c > 0$. Fie $x_1, x_2 \in I$, $\lambda \in [0, 1]$

$$(f \cdot g)((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)(c f)(x_1) + \lambda(c f)(x_2)$$

c) Fie $x_1, x_2 \in I$, $\lambda \in [0, 1]$

$$(f \circ g)((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = f(g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)) \leq (1-\lambda)(f \circ g)(x_1) + \lambda(f \circ g)(x_2)$$

deoarece g este convexă pe I $g((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)g(x_1) + \lambda g(x_2)$ iar f este crescătoare.

Aplicând f la inegalitatea precedentă se obține ce avem de demonstrat. ■

Propoziție 3: Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, este o funcție neconstantă și convexă atunci f nu-și poate atinge valoarea cea mai mare în interiorul intervalului.

Demonstrație: Presupunem prin reducere la absurd că f își atinge valoarea cea mai mare în x_0 în interiorul intervalului. Cum f nu este constantă rezultă că x_0 poate fi inclus într-un interval (x_1, x_2) , a.î. $x_1 < x_0 < x_2$ și cel puțin la capetele intervalului f să fie strict mai mică decât $f(x_0)$. Fie $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) \leq f(x_0)$.

Punem $x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ și înmulțind prima inegalitate cu $1-\lambda$ și a doua cu λ obținem $(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq f(x_0) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)$ relație ce contrazice convexitatea funcției f . ■

Exploatarea definiției și proprietăților funcției convexe / concave

1) Fie x un număr real astfel încât $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Arătați că $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$.

AMM, problema 10261

Soluție: Prin logaritmare inegalitatea devine $\ln(\cos x) - \lg x \ln(\sin x) > 0$.

Fie $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$, $\lambda \in (0, 1)$. Funcția logaritm natural este strict concavă, aplicând definiția se obține $\ln(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda \ln a + (1-\lambda) \ln b$.

Fie x un număr real astfel încât $0 < x < \frac{\pi}{4}$, punând $a = \sin x$, $b = \sin x + \cos x$, $\lambda = \lg x$ inegalitatea devine $\ln(\cos x) > \lg x \ln(\sin x) + (1-\lg x) \ln(\sin x + \cos x)$.

Observăm că $\lg x < 1$ iar $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$.

2) Comparați $\lg(\sin x)$ cu $\sin(\lg x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție: Fie $f(x) = \lg(\sin x) - \sin(\lg x)$, $f'(x) = \frac{\cos^3 x - \cos(\lg x) \cos^2(\sin x)}{\cos^2 x \cos^2(\lg x)}$.

Fie $0 < x < \operatorname{artg} \frac{\pi}{2}$. Din concavitățile funcției cosinus pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$\sqrt[3]{\cos(\lg x) \cos^2(\sin x)} \leq \frac{1}{3} [\cos(\lg x) + 2 \cos(\sin x)] \leq \cos \frac{\lg x + 2 \sin x}{3} < \cos x.$$

Ultima inegalitate rezultă din

$$\left(\frac{\lg x + 2 \sin x}{3}\right)' = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \cos x\right] \geq \sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x} \cos x \cdot \cos x} = 1.$$

Așadar, $\cos^3 x - \cos(\operatorname{tg} x) \cos^2(\sin x) > 0$ deci $f'(x) > 0$. Deci, funcția este crescătoare pe $\left[0, \operatorname{artg} \frac{\pi}{2}\right]$. Pentru a încheia demonstrația este suficient să punctăm că

$$\operatorname{tg} \left[\sin \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \right) \right] = \operatorname{tg} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} > 1$$

Dacă $x \in \left[\operatorname{artg} \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ atunci $\operatorname{tg}(\sin x) > 0$ și atunci $f(x) > 0$.

O inegalitate deosebit de utilă și la care vom apela de multe ori este următoarea:

3) Fie $f : [0, 1] \rightarrow R$ o funcție concavă crescătoare astfel încât $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Arătați că

$$f(x)f^{-1}(x) \leq x^2, \forall x \in [0, 1].$$

Soluție: Fie $0 < a \leq b \leq 1$. Punând $t = \frac{b-a}{a}$ și folosind definiția funcției concave obținem

$$f(a) \geq \frac{af(b) + (b-a)f(0)}{b} = \frac{af(b)}{b}.$$

Dacă $x = a$, $b = 1$ obținem $f(x) \geq x$ și cum f^{-1} este crescătoare avem $x = f^{-1}(f(x)) \geq f^{-1}(x)$

Pentru $x = b \neq 0$, $a = f^{-1}(x)$ obținem $x = f(f^{-1}(x)) \geq \frac{f^{-1}(x)f(x)}{x}$, adică

$$f(x)f^{-1}(x) \leq x^2, \forall x \in [0, 1].$$

4) Fie a, b, u, v numere nenegative astfel încât $a^5 + b^5 \leq 1$, $u^5 + v^5 \leq 1$. Arătați că $a^2u^3 + b^2v^3 \leq 1$.

Soluție: Folosim inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică:

$$\frac{2a^5 + 3u^5}{5} = \frac{a^5 + a^5 + u^5 + u^5 + u^5}{5} \geq \sqrt[5]{a^{10}u^{15}} = a^2u^3$$

$$\frac{2b^5 + 3v^5}{5} \geq b^2v^3$$

$$a^2u^3 + b^2v^3 \leq \frac{2a^5 + 3u^5}{5} + \frac{2b^5 + 3v^5}{5} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{5} = 1$$

5) Arătați că: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (inegalitatea dintre media aritmetică și media pătratică).

Soluție: Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ este convexă. Aplicând rezultatul “dacă f este convexă pe un interval atunci $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ ” obținem inegalitatea dorită.

Prin inducție se ținând cont și de convexitatea funcției $f : [0, \infty) \rightarrow R$, $f(x) = x^n$ se poate

generaliza: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}}$.

6) Arătați că $e^{\frac{1}{e}} + e^{\frac{1}{\pi}} \geq 2e^{\frac{1}{3}}$.

Soluție: Considerăm funcția $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} < 0, f''(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) > 0,$$

rezultă că f este convexă descrescătoare $\frac{f(e)+f(\pi)}{2} \geq f\left(\frac{e+\pi}{2}\right)$.

Pe de altă parte $\frac{e+\pi}{2} < 3$, iar f fiind descrescătoare $f\left(\frac{e+\pi}{2}\right) > f(3)$.

În anul 1965 profesorul Tiberiu Popovici publica următoarea inegalitate:

7) Teoremă (inegalitatea Tiberiu Popovici): Fie $f : I \rightarrow R$ o funcție convexă și a, b, c puncte din intervalul I . Atunci

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} + f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right].$$

Demonstrație: Știm că $f : I \rightarrow R$ este o funcție convexă, atunci

$$f(\alpha a + \beta b) \leq \alpha f(a) + \beta f(b), \forall a, b \in I, \alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1.$$

Folosind acest rezultat vom demonstra teorema. Pentru început observăm că inegalitatea este simetrică în a, b, c . Presupunem că $a \leq b \leq c$. Putem avea $b \leq \frac{a+b+c}{3}$ sau $b > \frac{a+b+c}{3}$.

Dacă $b \leq \frac{a+b+c}{3}$ avem ordonările: $\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a+c}{2} \leq c$, $\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{b+c}{2} \leq c$.

Considerăm combinațiile convexe:

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{2} &= \alpha \frac{a+b+c}{3} + \beta c, \alpha + \beta = 1, \\ \frac{b+c}{2} &= \lambda \frac{a+b+c}{3} + \mu c, \lambda + \mu = 1. \end{aligned}$$

Prin adunarea celor două inegalități obținem:

$$\frac{a+b+2c}{2} = (\lambda + \alpha) \frac{a+b+c}{3} + (2 - \lambda - \alpha)c = (\lambda + \alpha) \frac{a+b-2c}{3} + 2c \Rightarrow \frac{a+b-2c}{3} = (\lambda + \alpha) \frac{a+b-2c}{3}$$

Deci, $\alpha + \lambda = \frac{3}{2}$.

Din convexitatea funcției f se obține: $f\left(\frac{a+c}{2}\right) \leq \alpha f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (1-\alpha)f(c)$,

$f\left(\frac{b+c}{2}\right) \leq \lambda f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (1-\lambda)f(c)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$. Adunând aceste relații

obținem $f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{c+a}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \frac{1}{2}f(a) + \frac{3}{2}f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Înmulțind acest rezultat cu $\frac{2}{3}$ se obține inegalitatea dorită. Analog, se tratează cazul când

$b > \frac{a+b+c}{3}$. ■

Considerând funcția convexă $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și aplicând inegalitatea lui Popoviciu

obținem inegalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$, $a, b, c > 0$.

Inegalitatea $64abc(a+b+c) \leq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$, $a, b, c > 0$ se obține prin aplicarea inegalității lui Popoviciu funcției $f(x) = -\ln x$, pentru $x > 0$.

8) Fie $x, y \in \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$, $x \neq y$. Arătați că $\ln^2 \frac{1+\sin xy}{1-\sin xy} < \ln \frac{1+\sin x^2}{1-\sin x^2} \ln \frac{1+\sin y^2}{1-\sin y^2}$.

Soluție: Definim funcția $f : \left(-\infty, \ln \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \ln \left(\ln \frac{1+\sin e^t}{1-\sin e^t} \right)$. Calculând derivata a

doua a funcției se obține $f''(t) = \frac{2e^t}{e^{2f(t)} \cos^2 e^t} \left[(\cos e^t + e^t \sin e^t) \ln \frac{1+\sin e^t}{1-\sin e^t} - 2e^t \right] > 0$ deci

funcția este strict convexă.

Definim acum funcția :

$$g(u) = (\cos u + \sin u) \ln \frac{1+\sin u}{1-\sin u} - 2u. \quad g(0) = 0, \quad g'(u) = u \cos u \ln \frac{1+\sin u}{1+\cos u} + 2tg u > 0, \quad \forall u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Deoarece $g > 0$ rezultă că $f''(t) > 0$ deci funcția f este strict convexă pe domeniul de

definiție. Așadar, $\ln^2 \frac{1+\sin xy}{1-\sin xy} = e^{2f(\ln x + \ln y)} < e^{f(2\ln x) + f(2\ln y)} = \ln \frac{1+\sin x^2}{1-\sin x^2} \ln \frac{1+\sin y^2}{1-\sin y^2}$. ■

Fiind date două numere reale pozitive a, b definim:

$$M_p(a, b) := \left(\frac{a^p + b^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \neq 0$$

$$L(a, b) := \frac{a - b}{\ln a - \ln b}$$

$M_p(a, b)$ se numește media generalizată a lui a, b .

$L(a, b)$ se numește media logaritmică a lui a și b .

Observăm că $M_1(a, b)$ este media aritmetică a lui a, b iar $M_{-1}(a, b)$ ne dă media armonică

a lui a și b . Dacă $p = \frac{1}{3}$ se obține media Lorentz.

Următorul rezultat ne dă o legătură între $L(a, b)$ și $M_p(a, b)$.

9) Dacă $p \geq \frac{1}{3}$ atunci $L(a, b) < M_p(a, b)$ pentru a, b numere reale pozitive și distincte.

Soluție: Fie $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{8} \ln x - \frac{x^3 - 1}{(x+1)^3}$. Derivata funcției este

$$f'(x) = \frac{3}{8} \frac{x-1}{x(x+1)^4}, \quad f''(x) > 0, \quad \forall x > 1, \quad f(1) = 0 \quad \text{deci} \quad f(x) > 0, \quad \forall x \in (1, \infty). \quad \text{Presupunem că}$$

$$0 < b < a, \quad \text{luăm } x = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \quad \text{în } f(x) > 0 \quad \text{și se obține} \quad \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \right)^3 > \frac{a-b}{\ln a - \ln b}.$$

10) Fie $a, b > 0$ și $x, c > 1$ numere reale. Arătați că $x^{ac} + x^{bc} \geq 2x^{(ab)^{\frac{c}{2}}}$.

Soluție: Funcția $f(t) = t^c$ este convexă în timp ce funcția $g(x) = x^t$ este convexă și crescătoare. Atunci funcția $h(t) = (g \circ f)(t) = x^{t^c}$ este convexă.

$$x^{ac} + x^{bc} = h(a) + h(b) \geq 2h\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2x^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^c} \geq 2x^{(ab)^{\frac{c}{2}}}$$

11) Arătați că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive atunci:

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\left\{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2, \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2, \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2\right\}.$$

Soluție: Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a < b < c$. Inegalitatea devine:

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \leq 3(a + c - 2\sqrt{ac}).$$

Fie a, c numere fixate. Definim funcția:

$$f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(b) = 3(a + c - 2\sqrt{ac}) - a - b - c + 3\sqrt[3]{abc}, \quad f''(b) = -\frac{2}{3}(ac)^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{3}} < 0,$$

deci funcția este concavă și își atinge minimumul în a sau în c .

Astfel, minimumul se atinge pentru $b = a$ sau $b = c$. Considerăm cazul în care $b = a$.

Inegalitatea devine $\frac{2c + 3c^{\frac{1}{3}} + 1}{6} \geq \sqrt{c}$, inegalitate provenită din inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică.

Analog cazul $a = c$.

12) Folosind proprietățile funcțiilor concave să se arate că $\ln x \leq \frac{x}{e}$, $\forall x > 0$.

Soluție: Funcția $f(x) = \ln x$, $x > 0$ este concavă pe domeniul de definiție iar graficul său se va afla sub tangenta în orice punct al curbei. Ecuația tangentei în $x_0 = e$ la graficul funcției

$$\text{este } y - 1 = \frac{1}{e}(x - e), \quad y = \frac{x}{e}.$$

13) Să se arate că oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ și $x \in [-1, 1]$ avem $2e^{tx} \leq e^t + e^{-t} + x(e^t - e^{-t})$.

Soluție: Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{tx}$, $f'(x) = te^{tx}$, $f''(x) = e^{tx}(t^2 + 1) > 0$, deci funcția este convexă, prin urmare restricția funcției la $[-1, 1]$ are graficul sub coarda determinată de punctele $(-1, f(-1))$ și $(1, f(1))$. $f(x) \leq ax + b$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} a+b=f(1) \\ -a+b=f(-1) \end{cases}$ se obține $b = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $a = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Folosind lema lui Galvani putem deduce următoarele inegalități:

14) Fie $0 < a < b < c$ (sau $0 < b < c < a$, $0 < c < b < a$) numerele reale. Atunci:

- a) $a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b} > a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$
- b) $ab^n + bc^n + ca^n > ac^n + ba^n + cb^n, n \geq 1$.
- c) $a^b b^c c^a > a^c c^b b^a$
- d) $\frac{a(c-b)}{(c+b)(2a+b+c)} + \frac{b(a-c)}{(a+c)(a+2b+c)} + \frac{c(b-a)}{(b+a)(a+b+2c)} > 0$.

Soluție: Lema ne spune că pentru o funcție strict convexă pe un interval avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0.$$

a) Se consideră funcția strict convexă $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Aplicând lema avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \sqrt{a} \\ 1 & b & \sqrt{b} \\ 1 & c & \sqrt{c} \end{vmatrix} > 0.$$

După calculul determinantului se obține inegalitatea cerută.

b) Se ia $f(x) = x^n$.

c) Prin logaritmare inegalitatea se rescrie $b \ln a + c \ln b + a \ln c > c \ln a + b \ln c + a \ln b$. Funcția logaritm natural este concavă, deci:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \ln a \\ 1 & b & \ln b \\ 1 & c & \ln c \end{vmatrix} < 0.$$

Bibliografie

1. DRIMBE, M. O. *Inegalități idei și metode*. Editura GIL, 2003.
2. GANGA, M. *Manual de analiză matematică clasa a XII a*. Editura Mathpress, 2007.
3. MITROVIĆ, D. S. *Analytic Inequalities*. Heidelberg: Springer, 1970.
4. PHAM, K. H. *Secrets in Inequalities volume 1+2 - advanced inequalities*. GIL Publishing House, 2008.
5. RADU, E., ȘONTEA, O. *Manual de analiză matematică (clasa a XI a+ a XII a)*. Editura Bic ALL, 2006.